EPU GB 3ème année | *Outils Mathématiques pour la Biologie*
Examen du 15 décembre 2015 | Formulaire d'une page autorisé.

Inscrivez ***lisiblement*** *vos* NOM *et Prénom en tête de vos copies.*

Tout équipement de calcul, programmation, communication est interdit. Lire d'abord la totalité de l'énoncé, et commencer par ce qui vous semble le plus facile. Si besoin, on pourra supposer certaines questions résolues.

Exercice 1 : (**Résoudre les équations suivantes avec conditions initiales [5 pts]**)
En l'absence d'intuition d'une solution particulière, on pourra utiliser la méthode de la variation de la constante.

1. [2 pts] $y' + 4xy = 2x$ avec $y(0) = 2$
2. [3 pts] $y'' - 3y' + 2y = 2x^2$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$

Exercice 2 : (**Evolution d'une maladie contagieuse dans une population [7 pts]**)
Une population humaine est infectée par un virus. L'infection d'un individu sain peut survenir lors de son contact avec un individu malade (avec une probabilité α). Un individu malade peut guérir avec une probabilité constante au cours du temps (probabilité β). Soit x la proportion d'individus malade dans la population totale.

1. [**1 point**] α et β étant des nombres réels, montrez que la fonction $\dfrac{1}{x((\alpha-\beta)-\alpha x)}$ peut s'écrire de la forme $\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{(\alpha-\beta)-\alpha x}$ où A et B sont 2 constantes que vous déterminerez.
2. [**0.5 point**] Justifiez que la probabilité qu'un individu sain devienne malade au cours d'une journée est de la forme $\alpha \times x$.
3. [**0.5 point**] Justifiez que la probabilité qu'un individu malade devienne sain au cours d'une journée est de la forme β.
4. [**1 point**] Justifiez que la variation journalière de la proportion d'individus malades peut s'écrire sous la forme :
$$\frac{dx}{dt} = \alpha x(1-x) - \beta x$$
5. [**2 points**] Résoudre l'équation différentielle expliquant l'évolution de la proportion d'individus malades au sein de la population globale.
6. [**2 points**] Calculer $\lim_{t\to+\infty} x(t)$. On distinguera 2 cas selon le signe de $(\alpha-\beta)$. En déduire des résultats sur la progression de la maladie au sein de la population.

Exercice 3 : (**Le modèle de développement des plantes de Lindenmayer [8 pts]**)
Aristid Lindenmayer a proposé en 1968 une formalisation de règles de production d'éléments biologiques qui a, entre autre, permis de modéliser l'évolution morphologique de systèmes ramifiés (plantes). On considère une population cellulaire dont on veut étudier la croissance. La difficulté vient du fait que l'on cherche à étudier l'évolution de la structure. Par expérimentation, on a pu mettre en évidence que cette population cellulaire pouvait être divisée en 2 catégories qui ont des comportements différents :

— Les cellules jeunes, ou immatures, notées a, qui ne sont pas susceptibles de se diviser ; par contre, elles deviennent matures à l'étape d'après.

— Les cellules matures, notées b, qui se divisent et donnent à l'étape d'après, une cellule de type a *et* une cellule de type b.

Pour la suite de l'exercice, on suppose que l'état initial ne contient qu'une seule cellule de type a. De plus, on considère les évolutions du système de générations en générations, autrement le temps compte le nombre de générations depuis l'état initial.

1. [**1 point**] Donnez la croissance de la population de $t = 1$ à $t = 5$ (cellules de type a et b confondues)
2. [**0,5 point**] On note par $N_a(t)$ et $N_b(t)$ le nombre de cellules a et b au temps t. Montrez la formule de récurrence suivante :

$$\begin{aligned} N_a(t+1) &= N_b(t) \\ N_b(t+1) &= N_a(t) + N_b(t) \end{aligned}$$

3. [**0,5 point**] Ecrivez le système précédent sous forme matricielle, on notera $N(n) = \begin{pmatrix} N_a(n) \\ N_b(n) \end{pmatrix}$ le vecteur des deux populations. La matrice représentant l'évolution du système sera notée A.
4. [**3 points**] Calculer les valeurs propres ainsi que les vecteurs propres associées à la matrice trouvée à la question précédente.
5. [**1 point**] Identifiez la matrice de transfert P. Puis calculez P^{-1}.
6. [**0,5 point**] Expliquez pourquoi A est une matrice diagonalisable.
   Calculez sa matrice diagonale, notée D.
   Justifiez vos réponses.
7. [**1,5 points**] Sachant que $N(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, donnez une expression équivalente de $N(n)$ qui utilise la matrice D.
   En déduire l'évolution du système lorsque n tend vers l'infini. Donnez une interprétation des résultats obtenus.

   Remarque : $\sqrt{5} \simeq 2.23$