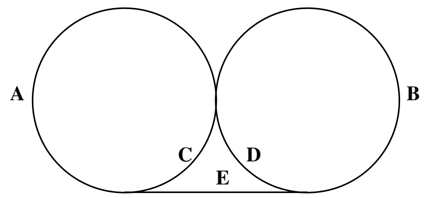
EPU GB4-BIMB **TD d'Algorithmique pour la biologie n.3** mars 2024

Quelques exercices sur les graphes

Exercice 1 : (**Un petit train**)



Le petit Laurent possède un train électrique dont le schéma est représenté ici. Il a remarqué qu'au bout d'un certain temps et quelle que soit la position intiale du train, il n'empruntait plus jamais la portion E. Pouvez-vous lui expliquer pourquoi ?

Exercice 2 : (**Le lemme de la poignée de main**)

1. Au cours d'une soirée entre amis, chacun serre la main à d'autres convives. A la fin de la soirée, chacun se souvient du nombre de mains qu'il a serré. Montrez que la somme de ces nombres est paire. Il s'agit du lemme de la poignée de mains pour un graphe non orienté :

$$\Sigma_{v \in S} deg(v) = 2|A|$$

2. En déduire qu'il y a un nombre pair de convives ayant serré un nombre impair de mains.
3. Est-il possible de relier 15 ordinateurs de sorte que chaque appareil soit relié à exactement 3 autres ?
4. Montrer que le nombre total de personnes qui ont habité la Terre et qui ont donné un nombre impair de poignées de mains est pair.

Exercice 3 : (**Chemins et chemins élémentaires**)

Montrer que si un graphe contient un chemin de u à v, alors il contient aussi un chemin élémentaire allant de u à v.

Exercice 4 : (**une relation entre le nombre d'arcs et le nombre de sommets**)

Montrer qu'un graphe $G = (S, A)$ non-orienté et connexe satisfait $|A| \geq |S| - 1$.

Exercice 5 : (**Une relation d'équivalence**)

Montrer que dans un graphe non-orienté, la relation ¨*est accessible à partir de*¨ est une relation d'équivalence pour les sommets du graphe :

— reflexive : $a\mathcal{R}a$
— symétrique : $a\mathcal{R}b \Longrightarrow b\mathcal{R}a$
— transitive : $a\mathcal{R}b$ `et` $b\mathcal{R}c \Longrightarrow a\mathcal{R}c$

Parmi ces trois propriétés, lesquelles restent valables pour les graphes orientés ?

Exercice 6 : (**Représentation par liste d'adjacence**)

Etant donné une représentation par liste d'adjacence d'un graphe orienté, quelle est la complexité temporelle pour calculer le degré sortant d'un sommet donné, puis de tous les sommets ? Qu'en est-il pour les degrés entrants ?

Exercice 7 : (**La transposée**)

La transposée d'un graphe est le graphe dont le sens de chacun des arcs a été inversé. Décrire des algorithmes efficaces permettant de calculer la transposée d'un graphe. On s'intéressera au cas de la représentation par liste d'adjacence puis au cas de la représentation par une matrice d'adjacence. Analyser le temps d'execution.

Exercice 8 : (**Le carré de la matrice d'adjacence**)

A partir d'un graphe $G = (S, A)$, on définit le graphe $G^2 = (S, A^2)$ dont l'ensemble des sommets est le même et dont les arcs sont définis par : $(u, w) \in A^2 \iff \exists v \in S \;\mid\; (u, v) \in A$ et $(v, w) \in A$. Décrire un algorithme permettant de calculer G^2 à partir de G, dans le cas de la représentation par liste d'adjacence puis dans le cas de la représentation par matrice d'adjacence. Analyser le temps d'execution.

Exercice 9 : (**Représentation d'un graphe en Python**)

Quelle structure de données proposez-vous pour représenter un graphe par listes d'adjacence ?