Introduction aux Réseaux de Petri

Département Génie Biologique
GB4 – année 2023–2024

Jean-Paul Comet

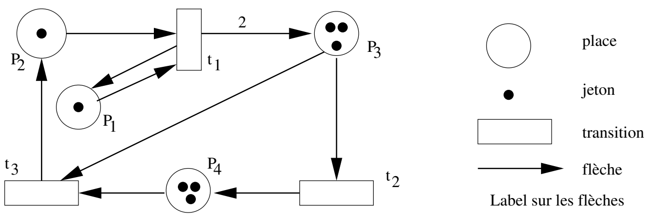
Université Côte d'Azur

14 mars 2024

Les réseaux de Petri

- Outil graphique et mathématique
- Simuler et modéliser des systèmes dans lesquels les notions d'événements et d'évolution sont importantes
- Carl Adam Petri, 1962
- Au départ, systèmes à événements discrets.
  Beaucoup d'extensions ont vu le jours
  Certaines sont vraiment dédiées à la modélisation de systèmes biologiques (RdP hybrides fonctionnels)
- l'envers de la médaille d'une grande expressivité :
  plus aucune propriété n'est prouvable...
- Avantage des réseaux de Petri :
  - fondations mathématiques fortes,
  - leur capacité à prendre en compte la concurrence.
  - un grand nombre de logiciels permettent de simuler et d'analyser les Réseaux de Petri (WoPeD, PNSim, Tina...)

Un exemple

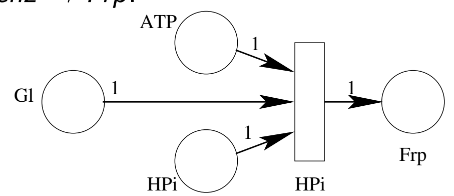


Intuitivement :

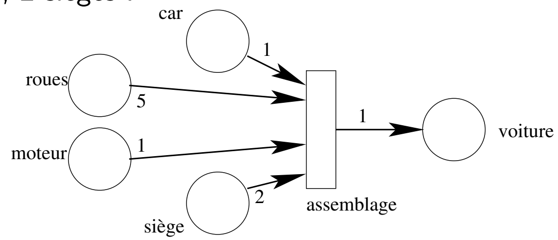
- Le nombre de jetons dans chaque places indique l'état de la variable associée à la place considérée.
  Ex : Si P_3 représente l'ATP, alors, il y a 3 ATP dans le système.
- L'état initial du système : vecteur des nombres de jetons
  Ex : l'état initial du système (fig), alors $M_0 = (1, 1, 3, 3)^t$.
  On appelle ce vecteur le **marquage initial**
- Les transitions correspondent à des événements qui ne peuvent avoir lieu que sous certaines conditions :
  chacune des places prédécesseurs doit avoit assez de jetons (*ressources*)

Un exemple

Ex 1 : Représentation d'une réaction enzymatique
$ATP + Gl + enz \to Frp$.



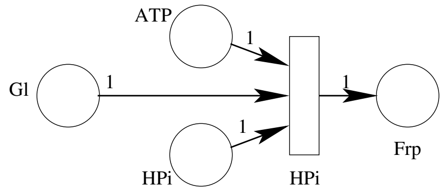
Ex 2 : L'assemblage d'une voiture nécessite 1 chassis, 5 roues, 1 moteur, 2 sièges :



On dit alors qu'une transition est **franchissable**.

Un exemple

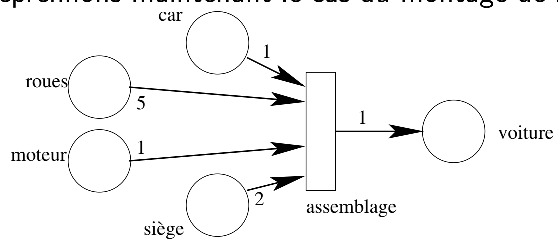
- Parmi toutes les transitions franchissables, on en choisit une en particulier. On dit que l'on **tire** la transition choisie.
- Il y a alors une modification de l'état (marquage) :
  - consommation des ressources nécessaires pour l'événement
  - production des éléments produits par l'événement



Ex 1 : marquage initial $M_0 =$ (ATP :3, Gl :2, HPi :1, Frp :0)
la transition est franchissable
$M_1 =$ (ATP :2, Gl :1, HPi :0, Frp :1).
Problème ?

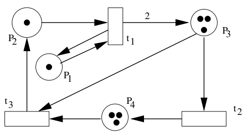
Un exemple

Ex 2 : Reprennons maintenant le cas du montage de la voiture.



Si le marquage initial M_0 est :
(carosserie :15, roues :16, moteur :3, sièges :5,voiture :3)
alors le marquage M_1 est
(carosserie :14, roues :11, moteur :2, sièges :3,voiture :4)

Représentation Matricielle

Le RdP  est représenté par :

- un ensemble de places : Places=$\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$
- un ensemble de transitions : Transitions=$\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$
- une matrice *Pre* : les arcs $\in$ *Places* $\times$ *Transitions*.
  $Pre(i,j)$ est différent de 0 si place$_i \longrightarrow$ transition$_j$
- une matrice *Post* : les arcs $\in$ *Transitions* $\times$ *Places*.
  $Post(i,j)$ est différent de 0 si transition$_i \longrightarrow$ place$_j$.

$$Pre= \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} t_1 & t_2 & t_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad Post= \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Représentation Matricielle

A partir de ces deux matrices, on définit la *matrice d'incidence* du réseau de Petri : $C = Post^t - Pre$. L'élément (i,j) de la matrice C donne le bilan pour la place i du tirage de la transition j.
Pour le premier exemple de ce chapitre, on a :

$$C = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} t_1 & t_2 & t_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Définitions formelles

Réseau de Petri

Un RdP est un quadruplet $\mathcal{R} = (P, T, Pre, Post)$ où

- P : ensemble fini de places
- T : ensemble fini de transitions
- Pre : application $P \times T \to \mathbb{N}$
- $Post$: application $T \times P \to \mathbb{N}$

On introduit la matrice d'incidence $C = Post^t - Pre$

Marquage

Un marquage est une application $M : P \to \mathbb{N}$

Transition franchissable

une transition t est franchissable si $\forall p \in P, M(p) \geq Pre(p, t)$.

On note parfois $M(t >$ ou encore $M \xrightarrow{t}$

changement d'état

Si t est franchissable, pour le marquage M, le franchissement (tir) de la transition t donne le nouveau marquage M' tel que

$$\forall p \in P, M'(p) = M(p) - Pre(p,t) + Post(t,p) = M(p) + C(p,t)$$

On note $M \xrightarrow{t} M'$ ou $M(t > M'$.

En posant e_t le vecteur de base correspondant à la transition t, on peut écrire : $M' = M + C.e_t$

Définitions formelles

Vecteur caractéristique

Soit s une séquence sur l'alphabet des transitions, on appelle *vecteur caractéristique* le vecteur $\overline{s}$ formé des nombres d'occurrences de chaque transition.

Exemple : pour la séquence $s = t_1 t_2 t_1 t_3 t_1$, on a $\overline{s} = (3, 1, 1)^t$

Equation Fondamentale (assez triviale)

Si s correspond à une suite de transitions franchissables, alors l'état obtenu après avoir franchi les transitions de s est donné par :

$$\begin{aligned} M &= M_0 + Post^t.\overline{s} - Pre.\overline{s} \\ &= M_0 + C.\overline{s} \end{aligned}$$

Considérons le vecteur caractéristique $\overline{s}$.

$\Delta = C \times \overline{s}$: vecteur de p entiers, où Δ_i correspond au gain/perte de la place i à la suite de la séquence de transitions : $\Delta_i = \sum_{k=1}^{n} C_{i,k}\overline{s}_k$.

Dans cette expression, $\overline{s}_k \times C_{i,k}$ correspond au nombre de fois où la transition k apparaît multiplié par le gain/perte de jetons de la place i pour un seul tirage de la transition k.

Définitions formelles

Conflit/parallélisme

- Deux transitions t_1 et t_2 sont en *conflit structurel* si elles ont une place d'entrée en commun.
- Deux transitions t_1 et t_2 sont en *conflit effectif* pour le marquage M si t_1 et t_2 sont en conflit structurel et si les 2 transitions sont franchissables.
- Deux transitions t_1 et t_2 sont *parallèles structurellement* si elles n'ont aucune place d'entrée en commun.
- Deux transitions t_1 et t_2 sont *parallèles pour un marquage donné* M si elles sont parallèles structurellement et si elles sont franchissables.

Marquages accessibles

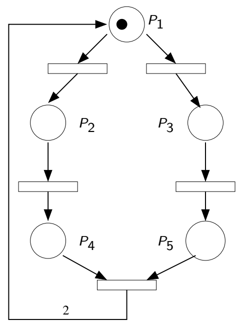
L'ensemble des marquages accessibles $A(\mathcal{R}, M_0)$ d'un RdP $\mathcal{R}$ à partir d'un état initial M_0 est l'ensemble des marquages que l'on peut atteindre à partir de M_0.

Représentation de la dynamique

On utilise le **graphe de marquages** quand le nombre de marquages accessibles est fini :

- ensemble des sommets = ens des marquages possibles
- il existe une flèche $M_1 \longrightarrow M_2$ s'il existe à partir du marquage M_1 une transition franchissable qui mène au marquage M_2.

Exemple. Tracer le graphe de marquage pour le RdP suivant :



Ordre partiel sur les vecteurs

Ordre partiel sur les vecteurs

Soients 2 vecteurs v_1 et v_2 de même dimension.

- $v_1 \leq v_2$ si on a $v_1(i) \leq v_2(i)$ pour tout i
  (si l'inégalité est vraie composante par composante).
- $v_1 < v_2$ si d'une part on a $v_1(i) \leq v_2(i)$ et
  si $\exists k$ pour laquelle on a $v_1(k) < v_2(k)$

Exemples :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

CÔTE D'AZUR
Introduction aux Réseau de Petri
Jean-Paul Comet
Concepts généraux
Représentation Matricielle
Définitions formelles
Représentation de la dynamique
Quelques propriétés
P-invariants
T-invariants
ADT sets

Algorithme – graphe de couverture

Algorithme de construction d'un graphe de couverture

1. A partir du marquage initial M_0, calculer toutes les transitions franchissables ainsi que les marquages successeurs correspondants. Si un des marquages est strictement supérieur à M_0, on met la variable ω pour chacune des composantes supérieures aux composantes de M_0.
2. Pour chaque nouveau marquage M_i, on fait l'une des étapes suivantes :
   1. S'il existe sur le chemin de M_0 jusqu'à M_i (ce dernier exclu) un marquage $M_j = M_i$ alors on confont M_i avec M_j et il n'est donc plus nécessaire de développer l'arbre à partir de M_i.
   2. Sinon, on prolonge le graphe avec les successeurs M_k de M_i : Une composante ω de M_i reste une composante ω de M_k. S'il existe un marquage M_j sur le chemin de M_0 à M_k tel que $M_k > M_j$, alors on met ω pour chacune des composantes supérieures aux composantes de M_j.

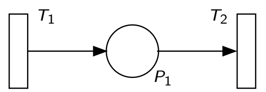
CÔTE D'AZUR
Introduction aux Réseau de Petri
Jean-Paul Comet
Concepts généraux
Représentation Matricielle
Définitions formelles
Représentation de la dynamique
Quelques propriétés
P-invariants
T-invariants
ADT sets

Remarque

- Le marquage symbolique ω désigne un nombre de jetons dans une place P_i qui peut atteindre un nombre arbitrairement grand (l'infini).
  Il représente en effet une infinité de marquages possibles.
- Les opérations arithmétiques avec ω sont simples :
  $\omega + k = \omega \quad \forall k \in \mathbb{N}$
  $\omega - k = \omega \quad \forall k \in \mathbb{N}$

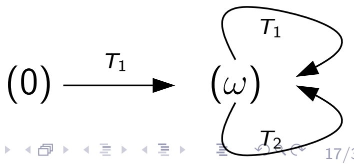
CÔTE D'AZUR
Introduction aux Réseau de Petri
Jean-Paul Comet
Concepts généraux
Représentation Matricielle
Définitions formelles
Représentation de la dynamique
Quelques propriétés
P-invariants
T-invariants
ADT sets

Exemple

RdP : 

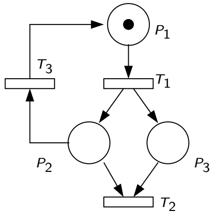
T_1 : transition source, franchissable un nombre infini de fois.
$\Rightarrow$ recours au graphe de couverture.
A partir du marquage initial $M_0 = (0)$, seule la transition T_1 est franchissable : $M_0 \xrightarrow{T_1} M_1 = (1)$. M_1 est supérieur à M_0 donc $M_1 = (\omega)$.
A partir de M_1, les deux transitions T_1 et T_2 sont franchissables :

- Si on franchit T_1 : $M_2 = (\omega + 1) = (\omega) = M_1$ et on ne cherche plus les successeurs de M_2.
- Si on franchit T_2 : $M_3 = (\omega - 1) = (\omega) = M_1$ et on ne cherche plus les successeurs de M_3.

D'où graphe de couverture : 

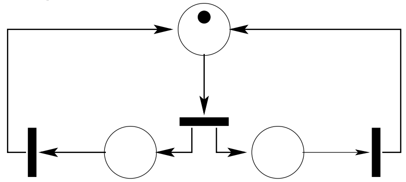
Exemple.

Utilisez l'algorithme de construction du graphe de couverture sur le RdP représenté ci-dessous à gauche :



Un RdP ne peut pas atteindre n'importe quel marquage, et on ne pourra pas franchir n'importe quelle séquence de transitions.
Quelques propriétés classiquement utilisées :

1. une place p d'un RdP marquée (avec marquage initial) est k-bornée si $\forall M' \in A(\mathcal{R}, M_0), M'(p) \leq k$
   Si $k = 1$, la place est dite *binaire*.
2. un RdP marqué est k-borné (bounded) si toutes les places sont k-bornées. Si k vaut 1, le RdP est dit *binaire*.
   Voici un exemple de réseau non borné :



3. Une transition t d'un RdP marqué $(\mathcal{R}, M_0)$ est *quasi-vivante* s'il existe un état M' accessible à partir de M_0 pour lequel la transition t soit franchissable :
   $M_0 \rightarrow^s M$ et $M \rightarrow^t$.

Un RdP ne peut pas atteindre n'importe quel marquage, et on ne pourra pas franchir n'importe quelle séquence de transitions.
Quelques propriétés classiquement utilisées :

4. Une transition t d'un RdP marqué $(\mathcal{R}, M_0)$ est *vivante* si de tout état accessible à partir de M_0, il existe une séquence de franchissement qui utilise t :

$$\forall M' \in A(\mathcal{R}, M_0), \exists s \text{ telle que } M' \xrightarrow{s} M'' \text{ et } M'' \xrightarrow{t}$$

   un RdP est dit *vivant* si toutes ses transitions le sont.
5. Un RdP est réinitialisable (propre) si de tout état accessible, il est possible de revenir à l'état initial :

$$\forall M \in A(\mathcal{R}, M_0), \exists s \text{ telle que } M \xrightarrow{s} M_0$$