Université de Nice-Sophia Antipolis — Licence Info 2
Outils formels pour l'Informatique — 2012–2013

Contrôle continu 16 janvier

Durée : 1 heure 30

Toutes les réponses doivent être justifiées. Le correcteur attachera de l'importance à la qualité de rédaction.

Une feuille manuscrite A4 autorisée - Calculatrice interdite

1 Complexité (4 points)

Classez du plus efficace au moins efficace les ordres de grandeur de complexité suivants, ici donnés dans le désordre (dans la suite, c est une constante telle que $c > 2$) :

$\mathcal{O}(n^2)$ $\mathcal{O}(log(n))$ $\mathcal{O}(n^c)$ $\mathcal{O}(nlog(n))$ $\mathcal{O}(2^n))$ $\mathcal{O}(n)$ $\mathcal{O}(1)$ $\mathcal{O}(n!)$ $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ $\mathcal{O}(c^n)$

$\mathcal{O}(1)$ $\mathcal{O}(log(n))$ $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ $\mathcal{O}(n)$ $\mathcal{O}(nlog(n))$ $\mathcal{O}(n^2)$ $\mathcal{O}(n^c)$ $\mathcal{O}(2^n))$ $\mathcal{O}(c^n)$ $\mathcal{O}(n!)$

....

2 Dénombrement (6 points)

On considère un jeu de 52 cartes. Trouver dans chaque cas le nombre de mains de 5 cartes,

1. qui contiennent un carré, c'est à dire quatre cartes de même niveau.

   Il y a $\binom{13}{1} = 13$ façons de choisir un niveau parmi les 13 niveaux de cartes. Il reste ensuite à choisir une carte parmi les 48 cartes restantes. Il y a donc $\binom{13}{1}\binom{48}{1} = 13.48$ mains qui comportent un carré.

   ....

2. qui contiennent un brelan, soit au moins 3 cartes de même niveau mais pas de carré.

   Il y a $\binom{13}{1} = 13$ façons de choisir une hauteur parmi les 13 hauteurs de cartes, et $\binom{4}{3}$ façons de choisir un brelan dans ce niveau. Il reste ensuite à choisir deux cartes parmi les 48 cartes restantes car on ne doit pas avoir de carré. Il y a donc $\binom{4}{3}\binom{13}{1}\binom{48}{2} = 4.13.\frac{48.47}{2}$ mains qui comportent un brelan.

   ....

3. qui contiennent une couleur, soit 5 cartes de la même couleur.

   Il y a $\binom{4}{1} = 4$ façons de choisir une couleur. On choisit ensuite 5 cartes dans cette couleur et on en déduit qu'il y a donc $\binom{4}{1}\binom{13}{5}$ mains qui comportent une couleur.

   ....

3 Récurrence (6 points)

On considère la suite des nombres définie par $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ et, pour $n \geqslant 2$, $u_n = 5u_{n-1} - 4u_{n-2}$.

1. Exprimer u_n en fonction de n

Cherchons tout d'abord les suites géométriques (x^n) qui satisfont la récurrence $u_n = 5u_{n-1} - 4u_{n-2}$. On obtient $x^n = 5x^{n-1} - 4x^{n-2}$ soit $x^2 - 5x + 4 = (x-4)(x-1) = 0$. Par conséquent les suites 4^n et 1^n forment une base de l'espace vectoriel de dimension 2 des suites qui satisfont la récurrence $u_n = 5u_{n-1} - 4u_{n-2}$. On en déduit qu'il existe deux constantes α et β telles que $u_n = \alpha + \beta 4^n$ Les conditions initiales fournissent alors les égalités suivantes $u_0 = 0 = \alpha + \beta$ et $u_1 = 1 = \alpha + 4\beta$, d'où on déduit que $\alpha = -\frac{1}{3}$ et $\beta = \frac{1}{3}$.
Finalement, on obtient que $u_n = \frac{4^n-1}{3}$

. . . .

2. Montrer que la série génératrice $u(x)$ de la suite u_n est la fonction $u(x) = \frac{x}{1-5x+4x^2}$.

Voici deux solutions pour cet exercice. On rappelle que $u(x) = \sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$

– Première solution
En multipliant chaque récurrence $u_n = 5u_{n-1} - 4u_{n-2}$ par x^n et en sommant pour $n \geqslant 2$, on obtient

$$\sum_{n\geqslant 2} u_n x^n = 5x \sum_{n\geqslant 2} u_{n-1}x^{n-1} - 4x^2 \sum_{n\geqslant 2} u_{n-2}x^{n-2}$$

. On remarque que
– $\sum_{n\geqslant 2} u_n x^n = u(x) - u_0 - u_1 x = u(x) - x$
– $\sum_{n\geqslant 2} u_{n-1}x^{n-1} = \sum_{n\geqslant 1} u_n x^n = u(x) - u_0 = u(x)$
– $\sum_{n\geqslant 2} u_{n-2}x^{n-2} = \sum_{n\geqslant 0} u_n x^n = u(x)$
on obtient l'équation $u(x) - x = 5xu(x) - 4x^2u(x)$ et donc que $u(x) = \frac{x}{1-5x+4x^2}$.

– Deuxième solution
A partir de $u_n = \frac{4^n-1}{3}$ on déduit que $u(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{4^n-1}{3} x^n$ et donc que

$$u(x) = \frac{1}{3}\sum_{n\geqslant 0}(4x)^n - \frac{1}{3}\sum_{n\geqslant 0} x^n$$

On sait que $\sum_{n\geqslant 0} x^n = \frac{1}{1-x}$ et $\sum_{n\geqslant 0}(4x)^n = \frac{1}{1-4x}$ et on en déduit donc que

$$u(x) = \frac{1}{3(1-4x)} - \frac{1}{3(1-x)}$$

En réduisant cette fraction rationnelle et en simplifiant le numérateur, on obtient $u(x) = \frac{x}{1-5x+4x^2}$.

. . . .

3. Donner la série génératrice $v(x)$ de la suite $v_n = nu_n$.

En dérivant $u(x) = \sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ par rapport à x, on obtient $u'(x) = \sum_{n\geqslant 0} nu_n x^{n-1}$ et donc $\sum_{n\geqslant 0} nu_n x^n = xu'(x)$.
La série génératrice de la suite (nu_n) est donc $xu'(x) = x\frac{1-4x^2}{(1-5x+4x^2)^2}$

. . . .

4 Langages (14 points)

Soit L l'ensemble des mots w sur l'alphabet à deux lettres $\{a, b\}$ contenant un nombre pair de lettre a.

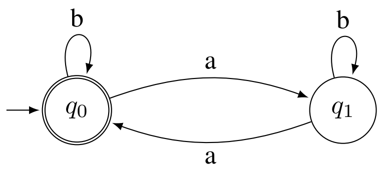
1. Donner les mots de L de longueur inférieure ou égale à 4.

Les mots de L de longueur inférieure ou égale à 4 sont, classé par longueur puis lexicographiquement,
$\epsilon, b, aa, bb, aab, aba, baa, bbb, aaaa, aabb, abab, abba, baab, baba, bbaa, bbbb$

2. Ecrire une expression rationnelle E caractérisant le langage L .

On a par exemple $E = b^* \left(ab^*ab^*\right)^*$

3. Dessiner un automate déterministe reconnaissant le langage L



4. Donner une définition inductive de L.

– On définit la base $B = \{\epsilon\}$
– On définit les règles d'induction par
  – Si u est dans L alors bu est aussi dans L.
  – Si u est dans L alors ub est aussi dans L.
  – Si u est dans L alors aua est aussi dans L.

5. Montrer par induction que les mots définis inductivement à la question précédente contiennent bien un nombre pair de lettres a.

– Le mot $\{\epsilon\}$ de la base contient bien un nombre pair de a
– Induction Si u contient un nombre pair de a,alors $|bu|_a = |ub|_a = |u|_a$ également et $|aua|_a = |u|_a + 2$ est aussi pair.

6. Quel est le nombre de mots de L de longueur n pour $n = 1, 2, 3$. Plus généralement, exprimer directement en fonction de n le nombre de mots de L de longueur n.

Il y a $1, 2, 4$ mots de L de longueur $1, 2, 3$.
Il y a 2^n mots de longueur n. Pour $n > 0$, est facile de voir qu'il y en a autant qui ont un nombre pair de a qu'un nombre impair de b. Il suffit de considérer l'application qui change la première lettre (a en b ou b en a).
Plus précisément définissons $\Sigma = \{a, b\}$, Σ^+ l'ensemble des mots non vides sur Σ et $f : \Sigma^+ \longrightarrow \Sigma^+$ l'application qui échange la première lettre. Soit alors I_n l'ensemble des mots de longueur n sur $\{a, b\}$ qui ont un nombre impair de a et P_n l'ensemble des mots de longueur n sur $\{a, b\}$ qui ont un nombre pair de a. L'application f est évidemment bijective de I_n vers P_n et par conséquent $|I_n| = |P_n|$. Or I_n et P_n sont disjoints et leur réunion possède 2^n éléments, ce sont tous les mots de longueur n.
Pour $n > 0$, il y a donc 2^{n-1} mots de longueur n sur l'alphabet $\{a, b\}$ qui ont un nombre pair de a.

7. Soit M la partie de L constituée des mots de L qui contiennent autant de a que de b

(a) Donner les mots de M de longueur inférieure ou égale à 4.

Les mots de M de longueur inférieure ou égale à 4 sont, classés par longueur puis lexicographiquement,
$\epsilon, aabb, abab, abba, baab, baba, bbaa, bbbb$

. . . .

(b) Exprimer en fonction de n le nombre de mots de M de longueur $2n$.

Les mots de M sont donc les mots sur l'alphabet $\{a, b\}$ qui ont un nombre pair de a et autant de a que de b. Ce sont donc des mots de longueur un multiple de 4. En effet si $2k$ est le nombre de a d'un mot w de M, la longueur de w sera $4k$. En fait, ce sont les mots de longueur $4k$ qui ont autant de a que de b. Il y en a donc $\binom{4k}{2k} = \binom{2n}{n}$ pour tout n multiple de 2 (c'est à dire $2n$ multiple de 4) et 0 sinon.

. . . .

(c) Montrer que M n'est pas un langage régulier.

Il faut utiliser le lemme de l'étoile. Il est plus peut être plus simple de se rappeler de la démonstration ...

Si M était régulier, il serait reconnu par un automate fini déterministe $\mathcal{A}$. Notons N le nombre de ses états. Alors le mot $w = a^{2N}b^{2N}$ qui appartient bien à M car il contient un nombre pair de a et qu'il a autant de a que de b serait reconnu par l'automate $\mathcal{A}$ et correspondrait donc à un chemin de cet automate allant de l'état initial I à un de ses états terminaux T. Mais puisque la longueur de w est strictement supérieur au nombre d'états, le chemin correspondant passe forcément deux fois par le même état. Soit E le premier de ces états, et notons

– u le mot correspondant au chemin allant de I à E,
– x le mot correspondant au chemin empruntant la première boucle de E à E, empruntée par le mot initial w.
– v le reste du mot, soit w privé de xu.

On remarque que ux est de longueur inférieure ou égale à N et par conséquent ne contient que des a. En particulier, $u = a^i$ et $x = a^j$ avec $j > 0$. On a alors $v = a^{2N-i-j}b^{2N}$. Mais le mot uv correspond alors à un chemin valide de $\mathcal{A}$, puisque allant de I à T. Le mot uv appartiendrait donc au langage M. Or, $uv = a^{2N-j}b^{2N}$ n'a pas autant de a que de b, et n'appartient donc pas à M, d'où la contradiction. Le langage M ne peut pas être régulier.

. . . .