Université de Nice-Sophia Antipolis — Licence Informatique 2
Outils Formels pour l'Informatique — 2013–2014

Contrôle continu Mercredi 12 Novembre 2014

Durée : 1h30

Toutes les réponses doivent être justifiées. Le correcteur attachera de l'importance à la qualité de rédaction. Les documents, calculatrices ou téléphones portables ne sont pas autorisés. Le barême, sur 30, est donné à titre indicatif.

1 Complexité (4 points)

On suppose dans cette partie qu'une instruction élémentaire est traitée en 10^{-12} secondes.

1. Quelle est le temps nécessaire au traitement d'une donnée de taille un million par un algorithme dont la complexité est n^2 ?
2. Quelle est la taille maximale que peut traiter un algorithme de complexité n^2 en une heure ?

Il faut résoudre dan chaque cas l'équation $n^2 * 10^{-12} = temps$. Dans le premier cas, $n = 10^6$ et donc le temps nécessaire au traitement d'une donnée de taille un million par un algorithme dont la complexité est n^2 est exactement une seconde. Dans le deuxième cas, on doit résoudre l'équation $n^2 * 10^{-12} = 3600$ soit une taille n égale à 60 millions.

. . . .

2 Récurrence et complexité (6 points)

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n > 0$, on a

$$\Sigma_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)}{2} = \frac{1}{6} n(1+n)(2+n)$$

.

On commence par vérifier que la propriété est vraie pour $n = 1$, ce qui est vrai puisque $1 = 1$.
On suppose ensuite que la propriété est vraie à l'ordre n, soit $\Sigma_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)}{2} = \frac{1}{6} n(1+n)(2+n)$, et on calcule
$\Sigma_{i=1}^{n+1} \frac{i(i+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} + \Sigma_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} + \frac{1}{6} n(1+n)(2+n)$, et l'on a prouvé que la propriété est vraie à l'ordre $n + 1$.

. . . .

2. En déduire la complexité de l'algorithme décrit ci dessous.

Algorithme

```
for i  from 1  to n do
     for  j  from 1 to i do
           for  k  from  1 to j do
                    x = x + 3;
           od
      od
 od
```

Le nombre d'instructions élémentaires dans chaque boucle la plus intérieure (en k) est exactement j et donc le nombre d'instructions élémentaires dans chaque boucle en j est exactement $1 + 2 + ..i = \frac{i(i+1)}{2}$. Finalement le nombre d'instructions élémentaires dans le programme complet est donc $\Sigma_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)}{2}$ soient $\frac{1}{6}n(1+n)(2+n)$ instructions élémentaires et donc une complexité en $O(n^3)$.

. . . .

3 Relations (6 points)

On décrit dans cette question à la construction des nombres rationnels.

1. On considère la relation sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ définie par $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$ lorsque $ad = bc$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. *Attention, dans cette question, il ne suffit pas d'écrire les définitions des différentes propriétés que satisfait une relation d'équivalence*

   - La relation $\mathcal{R}$ est évidemment réflexive car $ab = ba$ et donc $(a,b)\mathcal{R}(a,b)$
   - La relation $\mathcal{R}$ est évidemment symétrique car $ad = bc$ entraine que $cb = da$ et donc $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$ entraine que $(c,d)\mathcal{R}(a,b)$.
   - Enfin si $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$ et $(c,d)\mathcal{R}(e,f)$ alors on a simultanément $ad = bc$ et $cf = de$
     Si $c = 0$ alors forcément, puisque b, c, f sont non nuls, $ad = 0$ et $de = 0$ entraine que $a = e = 0$ et donc que $af = be = 0$ et donc que $(a,b)\mathcal{R}(e,f)$.
     Si $c \neq 0$ alors de $ad = bc$ et $cf = de$ on déduit tout d'abord que $adcf = bcde$ et donc que $af = be$ puisque maintenant c et d sont non nuls.
     Dans tous les cas, on a bien $(a,b)\mathcal{R}(e,f)$.

   . . . .

2. Quelle est la classe d'équivalence de l'élément $(1,2)$? .

   La classe d'équivalence de $(1,2)$ est l'ensemble des couples (x,y) où $y \neq 0$ et $1.y = 2x$, c'est à dire l'ensemble des couples de la forme $(k, 2k)$ où k est un entier non nul.

   . . . .

4 Ensembles dénombrables (4 points)

1. Montrer que l'ensemble F des mots finis commençant par 1 sur l'alphabet $\{0,1\}$ est dénombrable.

   A tout mot fini w commençant par 1 sur l'alphabet $\{0,1\}$ on peut lui associer l'unique entier n dont w est l'écriture binaire. Alors l'application qui à tout mot w lui fait correspondre $n - 1$ est une bijection sur l'ensemble des entiers naturels, ce qui démontre que l'ensemble F est dénombrable.

   . . . .

2. L'ensemble I des suites infinies de 0 et de 1 est il dénombrable ?

   Si l'ensemble I était dénombrable alors il existerait une bijection de $\mathbb{N}$ dans I et on pourrait écrire $I = \{s_i, i \in \mathbb{N}\}$, où chaque s_i est une suite infinie de 0 et de 1.
   On pourrait considérer alors la suite infinie constituée par les $i$ième éléments de chaque suite s_i où l'on remplace 0 par 1 et 1 par 0. Chaque suite s_i est forcément différente de s puisque par construction son i-ième terme est différent. Par contre s est une suite infinie de 0 et de 1 qui est donc dans I et qui n'est pas dans $\{s_i, i \in \mathbb{N}$ d'où une contradiction.

   . . . .

5 Induction (10 points)

On considère l'ensemble A des mots sur l'alphabet $\{a, b\}$ définis par induction de la manière suivante.

– Le mot vide ϵ est dans A
– Si u et v sont dans A, alors $f(u, v) = auav$ et $g(u) = bbu$ sont dans A

On considère également l'ensemble B des mots sur l'alphabet $\{a, b\}$ définis par induction de la manière suivante.

– Le mot vide ϵ est dans B
– Si u est dans B, alors $h(u) = aau$ et $k(u) = bbu$ sont dans B

1. Le mot $aabbaa$ appartient-il à A ? à B ? *Justifiez votre réponse*

Le mot $aabbaa$ appartient à la fois à A et à B car $aabbaa = f(f(g(\epsilon), \epsilon), \epsilon), \epsilon) = h(k(h(\epsilon)))$

. . . .

2. Le mot $abbaaa$ appartient-il à A ? à B ? *Justifiez votre réponse*

Le mot $abbaaa$ appartient à A car $abbaaa = f(g(\epsilon), f(\epsilon, \epsilon)$. Par contre $abbaaa$ ne peut pas appartenir à B car les mots de B sont soit vides, soit commencent par une lettre doublée (aa ou bb).

. . . .

3. Montrer que tous les mots de A et de B sont de longueur paire.

On démontre cette propriété par induction, en vérifiant tout d'abord que la propriété est vérifiée pour les éléments de la base. La longueur du mot vide est $O = 2.0$ qui est un nombre pair. On démontre ensuite que les opérations f, g, h et k conservent cette propriété, ce qui est évident puisque elles ajoutent chaque fois deux lettres à des mots de longueur paire.

. . . .

4. Est ce que $A \subset B$? *Justifiez votre réponse*.

Le mot $abbaaa$ appartient à A mais pas à B, donc l'ensemble A n'est pas inclus dans l'ensemble B.

. . . .

5. Est ce que $B \subset A$? *Justifiez votre réponse*.

Cette propriété se démontre également par induction. Elle est évidemment vérifiée par le seul mot de la base de B, ϵ qui est aussi dans A.

Si u est dans B et aussi dans l'ensemble A, alors, $h(u) = f(u, \epsilon)$ est aussi dans A et $k(u) = g(u)$ est aussi dans A.

. . . .