Université de Nice-Sophia Antipolis
Outils Formels pour l'Informatique

Licence Math-Info-BIM 2
2011–2012

Contrôle continu Lundi 9 janvier 2012

Durée : 1h30

Toutes les réponses doivent être justifiées. Le correcteur attachera de l'importance à la qualité de rédaction. Calculatrice interdite, une feuille A4 manuscrite autorisée.

1 Échauffement

1.1 Logique

1. Montrer que la proposition logique $(p \to q) \vee p$ est une tautologie

---

On a $(p \to q) \vee p = \neg p \vee q \vee p = \neg p \vee p \vee q = 1 \vee q = 1$, et donc cette proposition est une tautologie puisqu'elle est toujours vraie.

. . . .

2. Ecrire la négation de la proposition suivante, $\exists x, f(x) \wedge (\forall y, v(y) \to \neg p(x,y))$

$\forall x, \neg f(x) \vee (\exists y,\ v(y) \wedge p(x,y))$

. . . .

1.2 Complexité, récurrences

3. La complexité $p(n)$ dans le pire des cas de l'algorithme du tri rapide (*quick-sort*) pour trier une liste de n nombres vérifie l'équation de récurrence ci-dessous. Résolvez-la, c'est-à-dire exprimez le terme général $p(n)$ de la suite $(p(n))_{n \geqslant 2}$ en fonction de n uniquement.

$$\begin{cases} p(2) = 3 \\ \forall n > 2,\ \ p(n) = p(n-1) + n + 1 \end{cases}$$

En sommant les égalités $p(i) = p(i-1) + i + 1$ pour $i = 3, \ldots, n$ on obtient directement que $p(n) = (n+1) + n + \ldots + 4 + p(2)$. On en déduit que $p(n) = (n+1) + n + \ldots + 4 + 3 + 2 + 1 - 2 - 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 3 = \frac{(n+4)(n-1)}{2}$

. . . .

1.3 Enumération

4. Combien peut-on former de numéros de téléphone à 10 chiffres de la forme $06.xx.xx.xx.xx$?

On a huit chiffres à choisir entre 0 et 9, il y a donc 10^8 numéros possibles.

. . . .

5. Combien peut-on former de numéros de téléphone à 10 chiffres de la forme $06.xx.xx.xx.xx$ formés de chiffres tous différents (06.21.59.43.78 est valable, mais pas 06.21.52.43.78 car le chiffre 2 est utilisé deux fois) ?

Ici, il faut prendre une permutation des 8 chiffres $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$, il y a donc $8!$ numéros possibles.

. . . .

6. Combien peut on former de numéros de téléphone à 10 chiffres de la forme $06.xx.xx.xx.xx$ en utilisant seulement les chiffres $0, 0, 0, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 6$?

On commence par placer les 4 chiffres 4, ce qui fait $\binom{8}{4}$ possibilités. On place les deux chiffres 0 parmi les 4 positions restantes, soit $\binom{4}{2}$ possibilités. Restent deux possibilités pour placer les chiffres 3 et 5 aux deux places restantes. Au total, nous aurons donc $2\binom{8}{4}\binom{4}{2} = 2\frac{8!}{4!4!}\frac{4!}{2!2!} = \frac{8.7.6.5}{2} = 1680$.

. . . .

2 Problème

On s'intéresse dans ce problème au langage des mots sur l'alphabet $\{a, b\}$ qui ne contiennent pas le facteur baa. On note L ce langage et M le complémentaire de L dans $\{a, b\}^*$, c'est à dire le langage des mots qui contiennent au moins une fois le facteur baa. Enfin on note B l'ensemble des mots de L qui sont vides ou qui commencent par la lettre b. On notera $\mathcal{L}_n$ (resp. $\mathcal{M}_n$ et $\mathcal{B}_n$) l'ensemble des mots de L (resp. M et B) de longueur n.

2.1 Introduction

7. Écrire tous les mots de L de longueur inférieure ou égale à 3, les mots de B de longueur inférieure ou égale à 4 ainsi que les mots de M de longueur inférieure à 4.

- $L = \{\epsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, abb, bab, bba, bbb, \ldots\}$
- $B = \{\epsilon, b, ba, bb, bab, bba, bbb, baba, babb, bbab, bbba, bbbb, \ldots\}$
- $M = \{baa, abaa, bbaa, baaa, baab, \ldots\}$

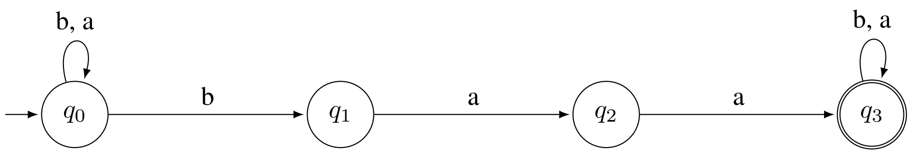
2.2 Etude du langage M

8. Donner une expression régulière qui décrit le langage M.

$(a + b)^*baa(a + b)^*$

9. Dessiner un automate non déterministe $\mathcal{A}_\mathcal{M}$ qui reconnait le langage M, en n'oubliant pas de préciser quel est l'état initial et les états acceptants.

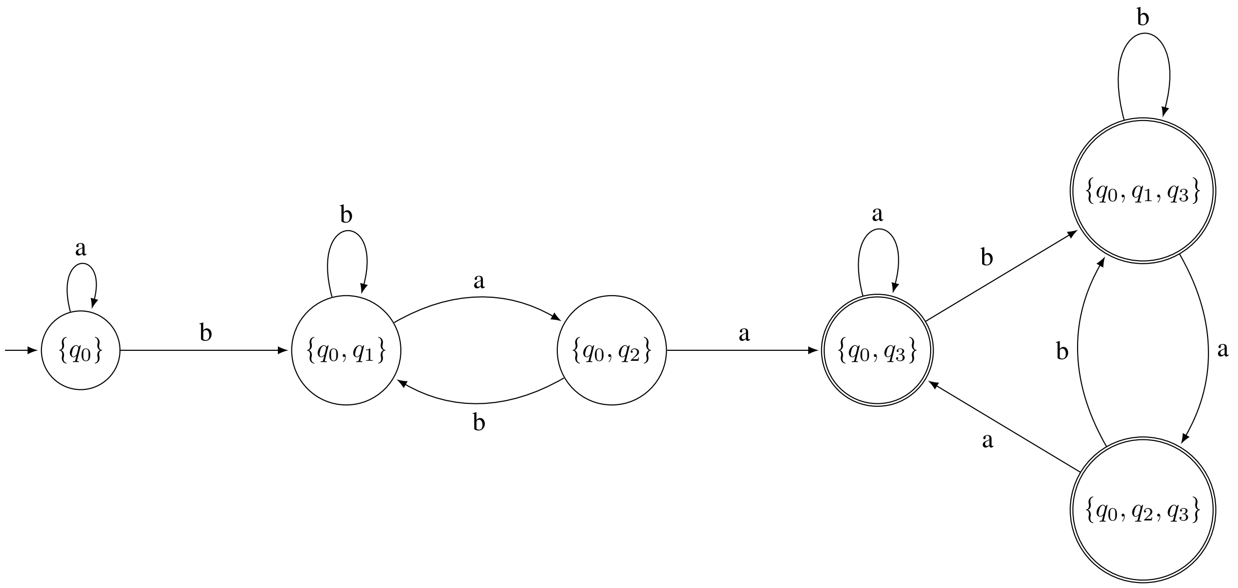
Dans l'automate $\mathcal{A}_\mathcal{M}$ ci dessous, l'état initial est l'état q_0, et il y a un seul état acceptant q_3.



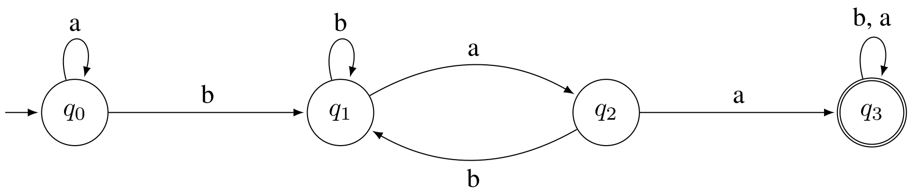
10. Déterminiser l'automate $\mathcal{A}_\mathcal{M}$. Dessiner l'automate déterministe $\mathcal{D}_\mathcal{M}$ obtenu.

Si on déterminise l'automate par sous-ensembles on obtient le tableau suivant qui définit la fonction de transition de l'automate déterminisé :

état	a	b
$\{q_0\}$	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$
$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_3\}$	$\{q_0, q_1\}$
$\{q_0, q_3\}$	$\{q_0, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_3\}$
$\{q_0, q_1, q_3\}$	$\{q_0, q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_3\}$
$\{q_0, q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_3\}$



11. En déduire que le langage M est également reconnu par l'automate déterministe $\mathcal{M}_\mathcal{M}$ complet dessiné ci dessous (il est équivalent à l'automate $\mathcal{D}_\mathcal{M}$ de la question précédente, mais possède moins d'états.

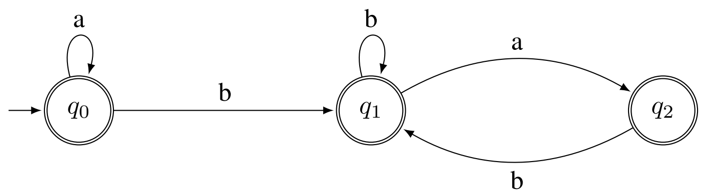


On remarque que tous les états issus de $\{q_0, q_3\}$ sont acceptants et que par conséquent le sous-automate réduit aux états $\{q_0, q_3\}, \{q_0, q_1, q_3\}$ et $\{q_0, q_2, q_3\}$ reconnait tous les mots sur l'alphabet $\{a, b\}$. Par conséquent les deux automates sont équivalents puisqu'ils reconnaissent les mêmes mots.

2.3 Etude du langage L

12. Déduire de $\mathcal{M}_\mathcal{M}$ un automate déterministe $\mathcal{D}_\mathcal{L}$ qui reconnait le langage L. Dessiner $\mathcal{D}_\mathcal{L}$

L'automate étant complet et déterministe, il suffit d'intervertir les états acceptants et les états non acceptants pour obtenir l'automate reconnaissant le complémentaire.



2.4 Etude du langage B

On s'intéresse ici au langage B des mots soit vide, soit sans facteur baa qui commencent par la lettre b.

13. Que faut il modifier à l'automate $\mathcal{D}_\mathcal{L}$ pour obtenir un automate déterministe $\mathcal{D}_\mathcal{B}$ qui reconnaisse le langage B ?

Il suffit que l'état q_0 ne soit plus acceptant.

14. Ecrire une expression rationnelle qui représente le langage B.

$B = (b + ba)$*

15. Montrer que le langage B peut être défini par induction de la manière suivante :
   – *Base :* La base est réduite au mot vide ϵ
   – *Schéma inductif :* Si u est un mot de B alors bu et bau appartiennent à B.

Notons B' le langage défini par induction. Il est clair que tout mot non vide de B' commence par la lettre b. On en déduit que B' est inclus dans B par induction en remarquant d'une part que la base ϵ ne contient pas baa et que si un mot u ne contient pas baa, il en est de même pour bu et bau.

On montre ensuite que B est inclus dans B' par récurrence sur la longueur du mot. Le résultat est vrai pour les mots de longueur 0 et 1. Supposons le résultat vrai pour tout mot de longueur n ou $n-1$: tout mot de B de longueur n ou $n-1$ appartient aussi à B', et soit w un mot de B de longueur $n+1$. Par définition, w commence par b et l'on considère deux cas :

– Si la deuxième lettre de w est un b alors $w = bu$ avec u commençant par b, u de longueur n et ne contenant pas de facteur baa. D'après l'hypothèse de récurrence, le mot u est dans B' et il en est de même pour $w = bu$.
– Si la deuxième lettre de w est un a, alors sa troisième lettre, si elle existe, est forcément un b (pas de facteur baa). Alors, $w = bav$ avec v commençant par b, v de longueur $n-1$ et ne contenant pas de facteur baa. D'après l'hypothèse de récurrence, le mot v est dans B' et il en est de même pour $w = bav$, ce qui termine la démonstration.

....

16. En utilisant le fait que cette définition inductive est non ambigüe, en déduire que le nombre de mots de B de longueur n est exactement le n-ième nombre de Fibonacci F_n défini par $F_0 = F_1 = 1$, et pour tout entier n, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Tout mot de B de longueur n peut s'écrire soit bu avec u de longueur $n-1$ soit bau avec u de longueur $n-1$. On en déduit que l'on a $B_n = B_{n-1} + B_{n-2}$ et puisque $B_0 = B_1 = 1$, on aura $B_n = F_n$ pour tout n.

....

2.5 Enumération des mots de L

17. Montrer que $L = a^*B$.

Tout mot w de L peut se factoriser sous la forme $w = a^k u$ avec u vide ou commençant par b, c'est à dire u appartenant à B. Réciproquement, tout mot $a^k u$ où u est dans B ne peut pas contenir de facteur baa. C'est donc que $L = a^*B$.

....

18. En déduire que le nombre L_n de mots de L de longueur n est égal à la somme des n premiers nombres de Fibonacci : $L_n = F_0 + F_1 + \ldots + F_n = \sum_{i=0}^{n} F_i$

On a $\mathcal{L}_n = a^n\mathcal{B}_0 + a^{n-1}\mathcal{B}_1 + a^{n-2}\mathcal{B}_2 + \ldots + a\mathcal{B}_{n-1} + \mathcal{B}_n$ d'où l'égalité $L_n = F_0 + F_1 + \ldots + F_n = \sum_{i=0}^{n} F_i$

....

19. Calculer L_i pour $i \leqslant 4$.

La suite de Fibonacci étant $1, 1, 2, 3, 5, \ldots$, on en déduit que la suite L_n est $1, 2, 4, 7, 12, \ldots$

....

20. Démontrer que, pour tout entier $n > 0$, on a $L_n = F_{n+1} - 1$

Ce résultat peut se démontrer par récurrence. Tout d'abord, l'égalité est vérifiée pour $n = 1$. Supposons-la vraie à l'ordre n et calculons $L_{n+1} = L_n + F_{n+1} = F_{n+2} - 1 + F_{n+1} = F_{n+3} - 1$ puisque $F_{n+32} = F_{n+1} + F_{n+2}$.

Une autre preuve (bijective) consiste à remarquer que l'application qui à tout mot de longueur $n+1$ de B, ne contenant pas que des b (il y en a $F_{n+2} - 1$) de la forme $b^{k+1}au$, lui fait correspondre le mot de $a^k bu$, est une bijection de $B_{n+1} - \{b^{n+1}\}$ dans L_n, ce qui suffit à prouver l'identité.

....