Université de Nice-Sophia Antipolis — Licence Informatique 2
Outils Formels pour l'Informatique — 2013–2014

Contrôle continu Mercredi 13 Novembre 2013

Durée : 1h30

Toutes les réponses doivent être justifiées. Le correcteur attachera de l'importance à la qualité de rédaction.

1 Complexité : 6 points

1.1 Algorithme

Donner la complexité de l'algorithme suivant, dans un premier temps en calculant exactement le nombres d'opérations arithmétiques nécessaires au traitement par l'algorithme d'une donnée n, et dans un deuxième temps en donnant une approximation en $\theta(?)$. Vous justifierez votre réponse.

listing 1

```
for (int i = 0; i < n; i++) {
    for (int j =i; j < n; j = j++) {
    x = x + 3; }
  }
```

Chaque boucle interne réalise$n-i$ additions, et donc le nombre total d'additions réalisées par ce programme est $\sum_{i=0}^{n-1}(n-i)$=$\sum_{i=1}^{n-1} i$=$\frac{n(n+1)}{2}$. On en déduit que la complexité de cet algorithme est quadratique, c'est à dire en $O(n^2)$.

. . . .

1.2 Temps de calcul

On suppose que sur une machine particulière chaque instruction élémentaire est réalisée en 10^{-12} secondes.

- Quel est le temps de calcul nécessaire au traitement d'une donnée de taille 10^6 par un algorithme en $\theta(n^2)$?
- Quel est la taille maximale des données que l'on peut traiter en 1 h par un algorithme en $\theta(n^2)$?

- Le temps de calcul nécessaire au traitement d'une donnée de taille 10^6 par un algorithme en $\theta(n^2)$ sera $(10^6)^2 10^{-12} = 1s$.
- La taille maximale des données que l'on peut traiter en 1h par un algorithme en $\theta(n^2)$ est le plus grand des entiers n tel que $(n)^2 10^{-12} \leq 3600s$, c'est à dire $n = 6.10^7$

. . . .

2 Relation d'ordre : 10 points

On note A l'alphabet $\{0, 1\}$ et on désigne par A^* l'ensemble des mots sur l'alphabet A et ϵ le mot vide. On considère dans A^* la relation $\prec_f$ définie par $u \prec_f v$ lorsque le mot u est un facteur du mot v, c'est à dire lorsqu'il existe deux mots p et s tels que $v = p.u.s$.

1. Montrer que la relation $\prec_f$ est une relation d'ordre sur A^*.

   - $\prec_f$ est réflexive car pour tout mot u on a $u = \epsilon.u.\epsilon$ et donc $u \prec_f u$.
   - $\prec_f$ est antisymétrique. Remarquons tout d'abord que si $u \prec_f v$ alors $|u| \leq |v|$. En particulier, si deux mots u et v satisfont $u \prec_f v$ et $v \prec_f u$ et par conséquent $|u| \leq |v|$ et $|v| \leq |u|$ donc $|u| = |v|$ et puisque u est facteur de v alors $u = v$.
   - $\prec_f$ est transitive car si $u \prec_f v$ et $v \prec_f w$ alors on peut trouver des mots p, s, p', s' tels que $v = p.u.s$ et $w = p'.v.s'$ et donc $w = p.p'.u.s'.s$ ce qui prouve que $u \prec_f w$.

   ....

2. Est ce une relation d'ordre totale ou partielle ? Justifiez votre réponse.

   C'est une relation d'ordre partielle car par exemple, les mots 00 et 11 sont incomparables pour cet ordre.

   ....

3. Soit $A = \{01, 10, 011, 110, 11, 0110, 111\}$.
   - Quels sont les éléments maximaux de A, les éléments minimaux de A ?

     Les éléments minimaux de A sont ceux qui n'ont pas d'éléments plus petits qu'eux dans A, il s'agit donc de 01,10 et 11. Les éléments maximaux sont 0110 et 111

     ....
   - Tracer le diagramme de Hasse de la relation $\prec_f$ restreinte à A

4. L'ensemble A^* muni de cette relation d'ordre est il un treillis ? Justifiez votre réponse.

   L'ensemble A^* n'est pas un treillis pour la relation $\prec_f$ car l'ensemble $\{00, 11\}$ n'admet pas de borne supérieure. En effet, il admet comme majorants tous les mots qui ont 00 et 11 comme facteurs et en particulier mots minimaux 0011 et 1100 dont aucun n'est borne inférieure.

   ....

3 Principe des tiroirs : 4 points

Montrer que dans n'importe quelle fête, on peut toujours trouver deux personnes qui connaissent le même nombre d'invités. On commencera à traiter le cas où chaque personne connait au moins un invité.

- On commence par traiter le cas où l'on suppose que chaque personne connait au moins un invité. Alors chacun des n invités connait a entre 1 et $n-1$ connaissances dans la fête. Le nombre de connaissances forme donc une suite de n nombres entre 1 et $n-1$. D'après le principe des tiroirs, au moins deux personnes ont donc le même nombre de connaissances.
- S'il se trouve que l'un des invités ne connait personne dans la fête, alors on peut refaire le raisonnement avec les $n-1$ personnes restantes. Soit on est ramené au cas précédent, soit il existe parmi ces $n-1$ personnes quelqu'un qui n'a aucune connaissances et on aura trouvé deux personnes qui n'ont aucune connaissance.

....

4 Ensembles définis par induction : 10 points

On définit la partie E de l'ensemble des mots sur l'alphabet 0,1 par
- (B) $B = \{\epsilon\}$
- (I) Si u est un mot de E alors $\phi(u) = 1.u.0$ et $\psi(u) = 0.u.1$ sont des mots de E. Si u et v sont deux mots de E alors $\theta(u, v) = u.v$ est également un mot de E.

1. Quel est le mot $u = \phi(\theta(\phi(\epsilon), \psi(\phi(\epsilon))))$?

$u = 1\theta(\phi(\epsilon), \psi(\phi(\epsilon)))0 = 1\phi(\epsilon).\psi(\phi(\epsilon))0 = 11\epsilon0.0\phi(\epsilon))10 = 1100.1\epsilon010 = 11001010$

. . . .

2. Exprimer le mot $v = 101100001011$ en fonction de ϕ, ψ, θ et ϵ

On a $v = \theta(\phi(\epsilon), \theta(\phi(\phi(\epsilon)), \psi(\theta(\psi(\epsilon), \psi(\epsilon)))))$

. . . .

3. Montrer par induction que les mots de E ont autant de lettres 0 que de lettres 1, c'est à dire que pour tout mot u de E on a $|u|_0 = |u|_1$..

On commence par vérifier que la base ϵ satisfait la propriété. On s'assure ensuite que chacune des fonctions ϕ, ψ et θ transportent la propriété. Si $u$et v ont autant de 0 que de 1, soit $|u|_1 = |u|_0$ et $|v|_1 = |v|_0$ alors il en est de même pour $|1u0|_1 = 1 + |u|_1 = 1 + |u|_0 = |1u0|_0$, $|0u1|_1 = 1 + |u|_1 = 1 + |u|_0 = |0u1|_0$ ainsi que pour $|uv|_1 = |u|_1 + |v|_1 = |u|_0 + |v|_0 = |uv|_0$

. . . .

4. Soit f la fonction définie de E dans $\mathbb{N}$ par induction par
   - $f(\epsilon) = 0$
   - $f(\phi(u)) = f(u) + 1$
   - $f(\psi(u)) = f(u) + 1$
   - $f(\theta(u, v)) = f(u) + f(v)$

   a. Calculer $f(u)$ et $f(v)$ où u et v sont les mots définis aux questions 1 et 2.

   b. Donner une interprétation de la fonction f.

La fonction f renvoie simplement le nombre commun de 0 ou de 1 d'un mot de E, c'est aussi la demi longueur.

. . . .

5. Montrer que E est exactement l'ensemble des mots qui ont autant de 0 que de 1, c'est à dire que E est exactement l'ensemble des mots u de $\{0, 1\}^*$ tels que $|u|_0 = |u|_1$ *Même si vous ne faites pas une preuve complète, il est demandé de donner au moins un squelette de preuve avec les types de raisonnements que vous utiliserez*

D'après la question 3, tout mot de E possède autant de 0 que de 1 il reste donc à démontrer l'inclusion réciproque, c'est à dire que tout mot ayant autant de 0 que de 1 appartient bien à E. Nous raisonnerons par récurrence généralisée sur la longueur du mot.

- *Le seul mot de longueur 0 est le mot vide qui appartient bien à E puisqu'il appartient à la base.*
- *Soit $n > 0$ un nombre entier tel que tout mot de longueur $< n$ ayant autant de 0 que de 1 appartienne aussi à E et soit alors un mot w de longueur n ayant autant de 0 que de 1. On peut supposer sans perdre de généralité que w commence par 1. Si w finit par 0 alors $w = 1v0$ et v, qui contient autant de 0 que de 1 et qui est de longueur $< n$ appartient donc E ce qui prouve que $w = \phi(v)$ appartient aussi à E. Si w commence et finit par 1, soit alors u le plus petit préfixe de $w = u.v$ (au sens de la longueur) qui ait autant de 0 que de 1. Alors on a v a aussi autant de 0 que de 1 et u et v sont de longueurs $< n$. Il appartiennent donc à E d'après l'hypothèse d'induction et $w = \theta(u, v)$ appartient aussi à E, ce qui termine la démonstration.*

. . . .