Nom :

Prénom :

Université de Nice-Sophia Antipolis — Licence Info 2

Outils formels pour l'Informatique — 2013–2014

Contrôle continu 20 janvier

Durée : 1 heure 30

Note :

Toutes les réponses doivent être justifiées. Le correcteur attachera de l'importance à la qualité de rédaction.

Une feuille manuscrite A4 autorisée - Calculatrice interdite

1 Echauffement (2 points par question)

1.1 Complexité

Si on admet qu'une instruction élémentaire est réalisée en $t_0 = 10^{-12}$ seconde, quel est approximativement le temps de traitement d'une donnée de taille 10^{12} par un algorithme de complexité $\theta(n\, log_2(n))$? On rappelle que $2^{10} = 1024 \approx 10^3$.

1.2 Suites récurrentes

Soit la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par

- $u_0 = 2$
- $u_1 = 5$
- Pour $n > 1$, $u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2}$

Résoudre cette récurrence, c'est à dire exprimer u_n en fonction de n

1.3 Logique

Montrer que l'expression logique $(p \to q) \vee (\neg p \to q)$ est une tautologie.

1.4 Dénombrement

Combien y a t il de suites de 5 chiffres (entre 0 et 9) qui contiennent exactement 3 occurrences du même chiffre ? Expliquez votre raisonnement. Par exemple $(1, 2, 1, 1, 3)$ et $(1, 2, 1, 3, 1)$ sont deux suites différentes qui satisfont cette propriété.

1.5 Induction

On appelle palindrome sur un alphabet A tout mot qui se lit indifféremment de gauche à droite ou de droite à gauche. Ainsi "radar", "abba" et "ressasser" sont des palindromes. Donner une définition inductive de l'ensemble des palindromes sur un alphabet à deux lettres $\{a, b\}$.

2 Problème (20 points)

Les deux parties peuvent être traitées indépendamment.

2.1 Première partie : automates finis

Soit L l'ensemble des mots sur l'alphabet à deux lettres $\{a, b\}$ contenant au moins une occurrence du facteur aba. On notera M son complémentaire, c'est à dire l'ensemble des mots qui n'ont aucune occurrence du facteur aba.

1. Donner une expression rationnelle qui représente le langage L

2. Dans un premier temps dessiner un automate non déterministe reconnaissant le langage L et préciser quel est le quintuplet définissant cet automate.

3. Déterminisez l'automate obtenu à la question précédente.

4. En déduire un automate déterministe reconnaissant le langage M des mots sans facteur aba.

2.2 Deuxième partie : récurrence

On considère l'application σ définie par

- $\sigma(a) = aba$
- $\sigma(b) = bb$

qui s'étend naturellement sur $\{a, b\}^*$ en définissant l'image d'un mot par σ par la concaténation des images des lettres qui le composent, $\sigma(w_1.w_2.\ldots.w_n) = \sigma(w_1).\sigma(w_2).\ldots.\sigma(w_n)$. Ainsi $\sigma(aaba) = \sigma(a).\sigma(a).\sigma(b).\sigma(a) = abaababbaba.$

On considère alors la suite de mots $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

- $u_0 = a$
- $u_n = \sigma(u_{n-1})$ pour $n > 0$

5. Calculer u_n pour $n = 1, 2, 3$

6. Montrer que pour tout $n > 0$ on a $u_n = u_{n-1}\ b^{2^{n-1}}\ u_{n-1}$

7. En déduire une récurrence sur la longueur $L_n = |u_n|$ des mots u_n

8. Montrer que pour $n > 0$, on a $L_n = (n + 2)2^{n-1}$

9. On note $a_n = |u_n|_a$ et $b_n = |u_n|_b$ respectivement le nombre de lettres a et de lettres b dans le mot u_n. Exprimer a_n et b_n en fonction de n.