

Nom : _____
Prénom : _____

Contrôle continu 16 janvier

Durée : 1 heure 30

Note :

Toutes les réponses doivent être justifiées. Le correcteur attachera de l'importance à la qualité de rédaction.

Une feuille manuscrite A4 autorisée - Calculatrice interdite

1 Complexité (4 points)

Classez du plus efficace au moins efficace les ordres de grandeur de complexité suivants, ici donnés dans le désordre (dans la suite, c est une constante telle que $c > 2$) :

$\mathcal{O}(n^2)$ $\mathcal{O}(\log(n))$ $\mathcal{O}(n^c)$ $\mathcal{O}(n \log(n))$ $\mathcal{O}(2^n)$ $\mathcal{O}(n)$ $\mathcal{O}(1)$ $\mathcal{O}(n!)$ $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ $\mathcal{O}(c^n)$

2 Dénombrement (6 points)

On considère un jeu de 52 cartes. Trouver dans chaque cas le nombre de mains de 5 cartes,

1. qui contiennent un carré, c'est à dire quatre cartes de même niveau.

2. qui contiennent un brelan, soit au moins 3 cartes de même niveau mais pas de carré.

3. qui contiennent une couleur, soit 5 cartes de la même couleur.

3 Récurrence (6 points)

On considère la suite des nombres définie par $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ et, pour $n \geq 2$, $u_n = 5u_{n-1} - 4u_{n-2}$.

1. Exprimer u_n en fonction de n

2. Montrer que la série génératrice $u(x)$ de la suite u_n est la fonction $u(x) = \frac{x}{1-5x+4x^2}$.

3. Donner la série génératrice $v(x)$ de la suite $v_n = nu_n$.

4 Langages (14 points)

Soit L l'ensemble des mots w sur l'alphabet à deux lettres $\{a, b\}$ contenant un nombre pair de lettre a .

1. Donner les mots de L de longueur inférieure ou égale à 4.

2. Ecrire une expression rationnelle E caractérisant le langage L .

3. Dessiner un automate déterministe reconnaissant le langage L

4. Donner une définition inductive de L .

5. Montrer par induction que les mots définis inductivement à la question précédente contiennent bien un nombre pair de lettres a .

6. Quel est le nombre de mots de L de longueur n pour $n = 1, 2, 3$. Plus généralement, exprimer directement en fonction de n le nombre de mots de L de longueur n .

7. Soit M la partie de L constituée des mots de L qui contiennent autant de a que de b

(a) Donner les mots de M de longueur inférieure ou égale à 4.

(b) Exprimer en fonction de n le nombre de mots de M de longueur $2n$.

(c) Montrer que M n'est pas un langage régulier.
