Nom :

Prénom :

Université de Nice-Sophia Antipolis
Licence Informatique 2
Outils Formels pour l'Informatique 2012–2013

Contrôle continu Mercredi 7 Novembre 2012

Durée : 1h30

Note :

Toutes les réponses doivent être justifiées. Le correcteur attachera de l'importance à la qualité de rédaction.

1 Complexité : 2 points

Donner la complexité de l'algorithme suivant, dans un premier temps en calculant exactement le nombres d'opérations arithmétiques nécessaires au traitement d'un tableau de taille n, et dans un deuxième temps en donnant une approximation en $O(?)$.Vous justifierez votre réponse.

listing 1

```
for (int i = 0; i < n; i++) {
    for (int j =0; j < i; j = j++) {
    x = x + 3; }
  }
```

2 Relations : 5 points

Soit la relation $\mathcal{R}$ définie sur $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ par : $i\mathcal{R}j \iff i + j$ est un nombre pair.

1. Représentez la relation $\mathcal{R}$ par la partie de $E \times E$ qui la définit.
2. Représentez la relation $\mathcal{R}$ par sa matrice directement sur la Table 1.
3. Tracer son diagramme directement sur la Figure 1.
4. Quelles sont les propriétés de $\mathcal{R}$? Justifiez vos réponses. Est-ce une relation d'ordre ? une relation d'équivalence ?

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

TABLE 1 – Matrice de la relation $\mathcal{R}$

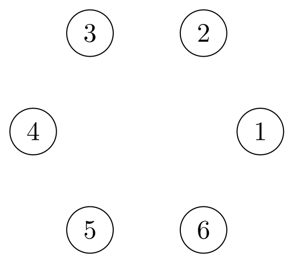

FIGURE 1 – Diagramme de la relation $\mathcal{R}$

- Réflexivité
- Symétrie
- Antisymétrie
- Transitivité
- Conclusions

3 Relation d'ordre : 6 points

On définit la relation $\ll$ sur $\mathbb{R}^2$ par $(x, y) \ll (x', y') \iff |x' - x| \leq y' - y$

1. Vérifiez que $\ll$ est une relation d'ordre. Justifiez chacune de ses propriétés.

2. Soient les trois points $O = (0, 0)$, $A = (1, 2)$ et $B = (3, 1)$. Comparez deux à deux ces trois points.

3. La relation d'ordre $\ll$ est-elle totale ? Pourquoi ?

4. Quel est l'ensemble des points (x, y) tels que $(0, 0) \ll (x, y)$

5. Quels sont les majorants du couple (A, B). Dessiner l'ensemble obtenu. Le couple (A, B) admet-il une borne supérieure ? Si oui, laquelle ?

4 Récurrence : 3 points

Montrer par récurrence que pour tout n entier, $S_n = \sum_{i=1}^{n} i(i-1) = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$

5 Induction : 5 points

On considère l'ensemble $\mathcal{C}$ des couples de mots sur l'alphabet $\{a, b\}$ défini par induction par

- La base est réduite au mot $A = (a, b)$, c'est à dire $\mathcal{B} = \{A\}$
- Si un couple de mots (u, v) appartient à $\mathcal{C}$ alors, le couple $(v, v\dot{u})$ appartient aussi à $\mathcal{C}$. Autrement dit, l'ensemble $\mathcal{C}$ est engendré à partir du couple (a, b) par la fonction unaire f qui à un couple de mots (u, v) lui associe le mot $f((u, v)) = (v, vu)$.

1. Calculer $f(A)$, $f(f(A))$ et $f(f(f(A)))$.

2. Montrer que pour tout couple de mots (u, v) dans $\mathcal{C}$ les longueurs des mots u et v sont deux nombres de Fibonacci consécutifs. On rappelle que la suite de Fibonacci est définie par récurrence par $F_0 = F_1 = 1$ et $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pour $n \geq 2$.

3. Montrer que pour tout couple de mots (u, v) dans $\mathcal{C}$, le mot v commence par la lettre b.

4. Montrer que pour tout couple de mots (u, v) dans $\mathcal{C}$, u et v ne contiennent pas de facteur aa, autrement dit que dans u et v toute occurrence de a ne peut être suivie que par la lettre b.