Université de Nice-Sophia Antipolis — Licence Informatique 2
Outils Formels pour l'Informatique — 2012–2013

Contrôle continu Mercredi 7 Novembre 2012

Durée : 1h30

Toutes les réponses doivent être justifiées. Le correcteur attachera de l'importance à la qualité de rédaction.

1 Complexité : 2 points

Donner la complexité de l'algorithme suivant, dans un premier temps en calculant exactement le nombres d'opérations arithmétiques nécessaires au traitement d'un tableau de taille n, et dans un deuxième temps en donnant une approximation en $O(?)$.Vous justifierez votre réponse.

listing 1

```
for (int i = 0; i < n; i++) {
    for (int j =0; j < i; j = j++) {
    x = x + 3; }
  }
```

Chaque boucle interne réalise$i$ additions, et donc le nombre total d'additions réalisées par ce programme est $\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$. On en déduit que la complexité de cet algorithme est quadratique, c'est à dire en $O(n^2)$.

....

2 Relations : 5 points

Soit la relation $\mathcal{R}$ définie sur $E = \{1,2,3,4,5,6\}$ par : $i\mathcal{R}j \iff i+j$ est un nombre pair.

1. Représentez la relation $\mathcal{R}$ par la partie de $E \times E$ qui la définit.

On a $\mathcal{R} = \{(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(2,6),(3,3),3,5),(4,4),(4,6),(5,5),(6,6)\}$

....

2. Représentez la relation $\mathcal{R}$ par sa matrice directement sur la Table 1.

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

TABLE 1 – Matrice de la relation $\mathcal{R}$

....

	1	2	3	4	5	6
1	x		x		x	
2		x		x		x
3	x		x		x	
4		x		x		x
5	x		x		x	
6		x		x		x

TABLE 2 – Matrice de la relation $\mathcal{R}$

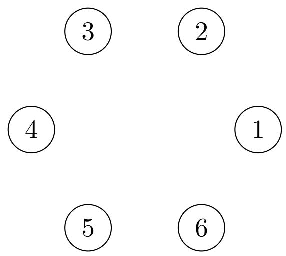

FIGURE 1 – Diagramme de la relation $\mathcal{R}$

3. Tracer son diagramme directement sur la Figure 1.
4. Quelles sont les propriétés de $\mathcal{R}$? Justifiez vos réponses. Est-ce une relation d'ordre ? une relation d'équivalence ?
   - Réflexivité

     Oui car $i + i = 2i$ est toujours pair
   - Symétrie

     Oui car $i + j = j + i$
   - Antisymétrie

     Non car $2\mathcal{R}4$ et $4\mathcal{R}2$
   - Transitivité

     Oui car si $i + j$ et $j + k$ sont pairs, il en est de même de $(i + j) + (i + k) - 2j = i + k$
   - Conclusions

     La relation $\mathcal{R}$ est donc une relation d'équivalence.

3 Relation d'ordre : 6 points

On définit la relation $\ll$ sur $\mathbb{R}^2$ par $(x, y) \ll (x', y') \iff |x' - x| \leq y' - y$

1. Vérifiez que $\ll$ est une relation d'ordre. Justifiez chacune de ses propriétés.

   $\ll$ est une relation d'ordre car

– $\ll$ est réflexive car $0 = |x - x| \leq y - y = 0$
– $\ll$ est antisymétrique car si $|x' - x| \leq y' - y$ et $|x - x'| \leq y - y'$ alors n particulier $y - y'$ est à la fois positif ou nul et négatif ou nul don $y = y'$
– $\ll$ est transitive car si $|x' - x| \leq y' - y$ et $|x'' - x'| \leq y'' - y'$ alors $|x" - x| \leq |x" - x'| + |x - x|$ d'après l'inégalité triangulaire) et donc par conséquent $|x" - x \leq y' - y + y'' - y = y'' - y$

. . . .

2. Soient les trois points $O = (0, 0)$, $A = (1, 2)$ et $B = (3, 1)$. Comparez deux à deux ces trois points.

On a $O \ll A$ et $O \ll B$ mais A et B ne sont pas comparables car $|1-3| = |3-1| = 2$ et $1-2 = -1$ et $2 - 1 = 1$

. . . .

3. La relation d'ordre $\ll$ est-elle totale ? Pourquoi ?

A et B n'étant pas comparables la relation$\ll$ n'est pas totale.

. . . .

4. Quel est l'ensemble des points (x, y) tels que $(0, 0) \ll (x, y)$

$(0, 0) \ll (x, y) \Longleftrightarrow |x| \leq y$ c'est à dire $x \geq 0$ et $x \leq y$ ou $x \leq 0$ et $-x \leq y$. C'est donc le quart de plan supérieur délimité par les deux droites y=x et y=-x.

. . . .

5. Quels sont les majorants du couple (A, B). Dessiner l'ensemble obtenu. Le couple (A, B) admet-il une borne supérieure ? Si oui, laquelle ?

Les majorants de A sont les points du quart de plan issu de A, délimité par les droites de pente -1 et 1 issues de A. Les majorants de B sont les points du quart de plan issu de B, la borne supérieure est donc le point d'intersection des droites $y - 2 = x - 1$ et $y - 1 = -(x - 3)$, soit $y = x + 1$ et $y = -x + 4$ et donc $x = \frac{3}{2}$ et $y = \frac{5}{2}$

. . . .

4 Récurrence : 3 points

Montrer par récurrence que pour tout n entier, $S_n = \sum_{i=1}^{n} i(i - 1) = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$

– On vérifie tout d'abord que l'égalité est vraie pour $n = 1$, soit $0 = 0$.
– Si on suppose que l'égalité est vérifiée pour un entier n, on en déduit que

$$S_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} i(i - 1) = S_n + n(n + 1) = \frac{(n - 1)n(n + 1)}{3} + n(n + 1)$$

Par conséquent, $S_{n+1} = \frac{n(n+1)}{3}(n - 1 + 3) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ d'où la démonstration.

. . . .

5 Induction : 5 points

On considère l'ensemble $\mathcal{C}$ des couples de mots sur l'alphabet $\{a, b\}$ défini par induction par
– La base est réduite au mot $A = (a, b)$, c'est à dire $\mathcal{B} = \{A\}$
– Si un couple de mots (u, v) appartient à $\mathcal{C}$ alors, le couple $(v, v\dot{u})$ appartient aussi à $\mathcal{C}$. Autrement dit, l'ensemble $\mathcal{C}$ est engendré à partir du couple (a, b) par la fonction unaire f qui à un couple de mots (u, v) lui associe le mot $f((u, v)) = (v, uv)$.

1. Calculer $f(A)$, $f(f(A))$ et $f(f(f(A)))$.

On a $f(A) = (b, ba)$, $f(f(A)) = (ba, bab)$ et $f(f(f(A))) = (bab, babba)$.

. . . .

2. Montrer que pour tout couple de mots (u, v) dans $\mathcal{C}$ les longueurs des mots u et v sont deux nombres de Fibonacci consécutifs. On rappelle que la suite de Fibonacci est définie par récurrence par $F_0 = F_1 = 1$ et $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pour $n \geq 2$.

Il est clair que A satisfait la propriété car les longueurs des mots de a sont 1 et 1. Supposons alors que tout couple de mots $C = (u, v)$ de $\mathcal{C}$ satisfasse la propriété, c'est à dire que $|u| = F_n$ et $|v| = F_{n+1}$ pour un certain entier n. Alors, $f(C) = (v, uv)$ satisfait $|v| = F_{n+1}$ et $|vu| = F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$ ce qui démontre la propriété par induction.

. . . .

3. Montrer que pour tout couple de mots (u, v) dans $\mathcal{C}$, le mot v commence par la lettre b.

La propriété est évidemment vrai pour l'élément de la base A. Supposons qu'elle soit vrai pour un couple $C = (u, v)$ de $\mathcal{C}$. Alors v commence par la lettre b et il en est de même pour vu dans le couple (v, vu).

. . . .

4. Montrer que pour tout couple de mots (u, v) dans $\mathcal{C}$, u et v ne contiennent pas de facteur aa, autrement dit que dans u et v toute occurrence de a ne peut être suivie que par la lettre b.

La propriété est évidemment vrai pour l'élément de la base A. Supposons qu'elle soit vrai pour un couple $C = (u, v)$ de $\mathcal{C}$. Alors ni u ni v ne contient de facteur aa. La seule possibilité pour que vu contienne aa serait alors qu'à la fois v termine par a (ce qui est toujours possible), mais que u commence par a également, ce qui n'est possible, d'après la question précédente que si $u = a$, mais alors $v = b$ termine par b, ce qui conclut la preuve.

. . . .