

Durée : 1h30

Note :

--

Nom : _____
Prénom : _____

Toutes les réponses doivent être justifiées. Le correcteur attachera de l'importance à la qualité de rédaction. Les documents, calculatrices ou téléphones portables ne sont pas autorisés. Le barème, sur 30, est donné à titre indicatif.

1 Relation d'ordre (3 points)

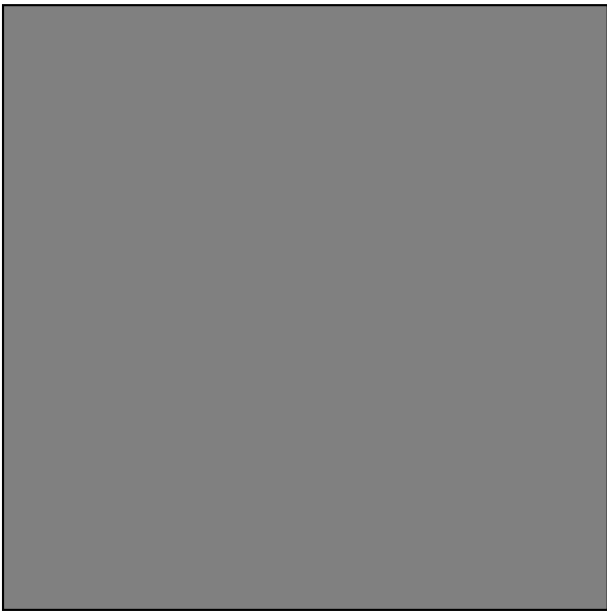
1. (1 point) Tracer le diagramme de Hasse de la relation divisé dans l'ensemble $A = \{1, 2, 4, 6, 8, 10\}$

2. (1 point) Quels sont les éléments maximaux de A ?

3. (1 point) Quelle la borne supérieure de A dans \mathbb{N}

2 Dénombrement (4 points)

1. (1 point) Combien peut on former de numéros de téléphone à dix chiffres dans $\{0, 1, \dots, 9\}$ (on ne se préoccupe pas de la véracité du préfixe, ainsi 89.87.65.23.12 est un numéro considéré comme valide) ?



2. (1 point) Combien peut on former de numéros de téléphone à dix chiffres formés de chiffres tous différents ?

3. (2 points) Combien peut on former de numéros de téléphone à dix chiffres formés des chiffres $\{0, 0, 2, 5, 5, 5, 6, 7, 7, 7\}$?

3 Ensembles dénombrables (3 points)

Soit f l'application de \mathbb{N}^2 vers $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ définie par $f(a, b) = 2^a(2b+1)$. Démontrer que cette application f est bijective. En déduire que l'ensemble \mathbb{N}^2 est dénombrable.

4 Problème

4.1 Partie I (10 points)

On considère l'ensemble F des mots sur l'alphabet $\{a, b\}$ définis par induction de la manière suivante

- La base est définie par $B = \{\epsilon\}$
- Si u est un mot de F alors les mots $\phi(u) = ua$ et $\psi(u) = ubb$ appartiennent à F .

1. (1 point) Ecrire tous les mots de F de longueur plus petite ou égale à 4

2. (1 point) Exprimer le mot $aabbabbbb$ en fonction de ϕ , ψ et ϵ .

3. (2 points) Montrer par induction que les mots de F ont un nombre pair de b .

4. (3 points) Montrer qu'un mot sur l'alphabet $\{a, b\}$ appartient à F si et seulement si toute suite maximale de b consécutifs est de longueur paire.

On note F_n le nombre de mots de F de longueur n .

5. (1 point) Calculer F_0 , F_1 , F_2 et F_3

6. (2 points) Montrer que la suite F_n est la suite de Fibonacci.

4.2 Partie II (7 points)

On définit dans F la relation $u \triangleleft v$ lorsque $|u| \leq |v|$ et que pour tout entier $k \leq |u|$ le préfixe de u de longueur k contient moins de lettres b que le préfixe de longueur k de v .

1. (2 points) Montrer que la relation \triangleleft est une relation d'ordre sur F

2. (1 point) Cette relation est-elle un ordre total ?

3. (1 point) Donner au moins quatre majorants du mot $aabbabbbb$?

4. (2 points) L'ensemble F muni de la relation d'ordre \triangleleft est-il un treillis ? Pourquoi ?

5. (1 point) L'ensemble F muni de la relation d'ordre \triangleleft est-il un treillis complet ? Pourquoi ?
