Université de Nice-Sophia Antipolis
Licence Math-Info-BIM 2
Outils Formels pour l'Informatique 2011–2012

Contrôle continu Lundi 7 Novembre

Nom :

Prénom :

Durée : 1h30

Note :

Toutes les réponses doivent être justifiées. Le correcteur attachera de l'importance à la qualité de rédaction. Calculatrice interdite, une feuille A4 manuscrite autorisée.

1 Echauffement

1. Convertir le nombre 212 (écrit en base 10) en binaire (en base 2)

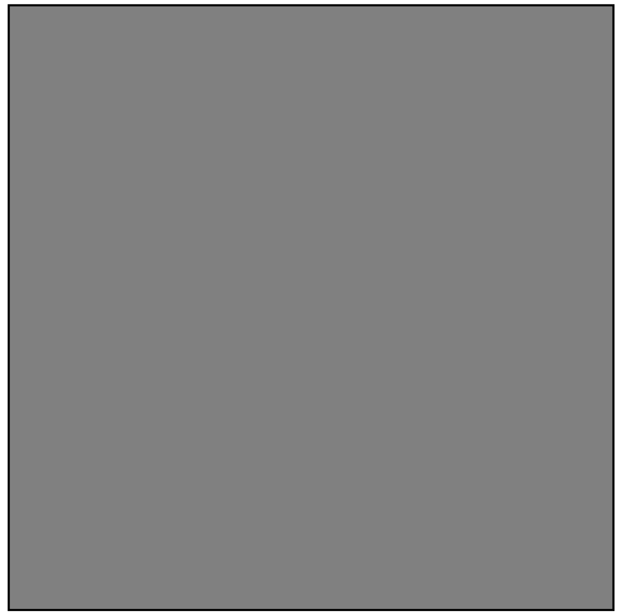
2. Convertir le nombre A2B3 (écrit en base 16) en binaire (en base 2).

3. En étudiant le comportement d'un programme, on a calculé que le déroulement du programme sur une donnée de taille n nécessitait $2n+1$ additions, $n+3$ multiplications et $n(n-1)$ comparaisons. Quelle est la complexité de ce programme ?

2 Ensembles

Soit E l'ensemble {1,2,3,4}. On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

1. Compléter en utilisant le symbole $\in$ ou $\subseteq$
   - $\{1,2\}$ $\quad E$
   - $\{1,2\}$ $\quad P(E)$
   - $\{\{1\}\}$ $\quad \mathcal{P}(E)$
   - $\{\{1\},\{2\}\}$ $\quad \mathcal{P}(E)$
2. Donner toutes les parties de E ayant exactement trois éléments. Dans la suite de l'exercice, on notera $A = \{X \in \mathcal{P}(E), |X| = 3\}$, où $|X|$ désigne le nombre d'éléments de la partie X.



3. On note B l'ensemble des parties de E dont la somme des éléments est supérieure ou égale à 6. Donner tous les éléments de B.

4. Quelle sont les éléments de $A \cup B$? de $A \cap B$?

5. Vérifier la formule du crible pour les ensembles A et B.

3 Récurrence

1. Montrer par récurrence que pour tout entier $n > 0$ de $\mathbb{N}$, on a, $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$.

2. Montrer par récurrence que pour tout entier $n > 0$ de $\mathbb{N}$, on a, $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = n(2n-1)(2n+1)/3$.

4 Induction

Soit M le sous-ensemble de $\mathbb{N}$ défini inductivement par
- $\mathcal{B} = \{0, 1\}$
- L'opération binaire $f \ : \ (x, y) \longmapsto 2x + 3y$

1. Montrer que 2 et 3 sont dans M.

2. Montrer que $4, 5$ et 6 sont dans M

3. Montrer que tout entier $n > 1$ peut s'écrire $n = 2\alpha + 3\beta$ avec $0 \leq \alpha < n$ et $0 \leq \beta < n$. En déduire que M contient $\mathbb{N}$

4. Que se passe-t-il si l'on remplace $\mathcal{B}$ par $\{1\}$ dans la définition ?

5. Que se passe-t-il si l'on remplace f par $f \ : \ (x, y) \longmapsto 2x + 6y$ dans la définition ?

5 Relation d'ordre

On définit la relation $\ll$ dans l'ensemble des couples d'entiers par $(a, b) \ll (c, d)$ lorsque
- $a \leq c$
- $a + b \leq c + d$

1. Comparer $(2, 5)$ et $(3, 6)$.

2. Montrer que la relation $\ll$ est une relation d'ordre.

3. Les couples $(2, 8)$ et $(3, 4)$ sont-ils comparables ? La relation $\ll$ est elle une relation d'ordre totale sur $\mathbb{N}$?

4. Tracer le diagramme de Hasse de cette relation sur tous les couples d'entiers de somme plus petite ou égale à 3.

5. Quels sont les majorants de $\{(2, 8),\ (3, 4)\}$?

6. Existe-il une borne supérieure de $\{(2, 8),\ (3, 4)\}$? Justifier votre réponse.

7. Montrer que $(\mathbb{N},\ \ll)$ est un treillis.