Université de Nice-Sophia Antipolis — Licence Math-Info-BIM 2
Outils Formels pour l'Informatique — 2011–2012

Contrôle continu Lundi 7 Novembre

Durée : 1h30

Toutes les réponses doivent être justifiées. Le correcteur attachera de l'importance à la qualité de rédaction. Calculatrice interdite, une feuille A4 manuscrite autorisée.

1 Echauffement

1. Convertir le nombre 212 (écrit en base 10) en binaire (en base 2)

$212_{10} = 11010100_2$.

. . . .

2. Convertir le nombre A2B3 (écrit en base 16) en binaire (en base 2).

$A2B3_{16} = 1010.0010.1011.0011_2$

. . . .

3. En étudiant le comportement d'un programme, on a calculé que le déroulement du programme sur une donnée de taille n nécessitait $2n+1$ additions, $n+3$ multiplications et $n(n-1)$ comparaisons. Quelle est la complexité de ce programme ?

Si l'on considère comme opérations élémentaires les opérations arithmétiques et les comparaisons, on obtient $2n+1+n+3+n(n-1) = n^2+2n+4$ opérations élémentaires soit une complexité en $O(n^2)$. Si l'on ne considère que les opérations arithmétiques, la complexité serait $2n+1+n+3 = 3n+4$, c'est à dire linéaire.

. . . .

2 Ensembles

Soit E l'ensemble {1,2,3,4}. On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

1. Compléter en utilisant le symbole $\in$ ou $\subseteq$
   - $\{1,2\} \subseteq E$
   - $\{1,2\} \in \mathcal{P}(E)$
   - $\{\{1\}\} \subseteq \mathcal{P}(E)$
   - $\{\{1\},\{2\}\} \subseteq \mathcal{P}(E)$
2. Donner toutes les parties de E ayant exactement trois éléments. Dans la suite de l'exercice, on notera $A = \{X \in \mathcal{P}(E), |X| = 3\}$, où $|X|$ désigne le nombre d'éléments de la partie X.

$A = \{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}\}$.

. . . .

3. On note B l'ensemble des parties de E dont la somme des éléments est supérieure ou égale à 6. Donner tous les éléments de B.

$B = \{\{2,4\},\{3,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4\}\}$.

. . . .

4. Quelle sont les éléments de $A \cup B$? de $A \cap B$?

Puisque $A \subset B$ on a $A \cup B = B$ et $A \cap B = A$.

. . . .

5. Vérifier la formule du crible pour les ensembles A et B.

On a $|A| = |A \cap B| = 4$ et $|B| = |A \cup B| = 7$. Or, $|A \cup B| = 7 = |A| + |B| - |A \cap B| = 4 + 7 - 4$.

. . . .

3 Récurrence

1. Montrer par récurrence que pour tout entier $n > 0$ de $\mathbb{N}$, on a, $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$.

Pour $n = 1$ on a $\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 1 = 1^2$. Supposons l'égalité vraie pour $n > 0$. On a $\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + (2(n+1)-1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$.

. . . .

2. Montrer par récurrence que pour tout entier $n > 0$ de $\mathbb{N}$, on a, $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = n(2n-1)(2n+1)/3$.

Pour $n = 1$ on a $\sum_{k=1}^{1}(2k-1)^2 = 1 = 1(2-1)(2+1)/3$. Supposons l'égalité vraie pour $n > 0$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)^2 &= \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 + (2(n+1)-1)^2 \\
&= n(2n-1)(2n+1)/3 + (2n+1)^2 \\
&= (2n+1)(\frac{n}{3}(2n-1) + 2n + 1) \\
&= \frac{2n+1}{3}(n(2n-2) + 6n + 3) \\
&= \frac{2n+1}{3}(2n^2 + 5n + 3) \\
&= \frac{2n+1}{3}(n+1)(2n+3) \\
&= (n+1)(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)/3
\end{aligned}$$

. . . .

4 Induction

Soit M le sous-ensemble de $\mathbb{N}$ défini inductivement par

- $\mathcal{B} = \{0, 1\}$
- L'opération binaire $f \ : \ (x, y) \longmapsto 2x + 3y$

1. Montrer que 2 et 3 sont dans M.

$2 = f(1, 0)$ et $3 = f(0, 1)$

. . . .

2. Montrer que $4, 5$ et 6 sont dans M

On sait que $0, 1, 2$, sont dans M, on en déduit que $4 = f(2, 0)$, $5 = f(1, 1)$ et $6 = f(0, 2)$ également.

. . . .

3. Montrer que tout entier $n > 1$ peut s'écrire $n = 2\alpha + 3\beta$ avec $0 \leq \alpha < n$ et $0 \leq \beta < n$. En déduire que M contient $\mathbb{N}$

Si un entier n est pair, alors il s'écrit $n = 2 \cdot n/2 + 3 \cdot 0$ avec $n/2 < n$. Si n est impair, alors $n - 3$ est pair et $n = 2\frac{n-3}{2} + 3$. Raisonnons alors par récurrence généralisée sur n : supposons que tout entier $k < n$ appartienne M. Alors, écrivons $n = 2\alpha + 3\beta$ avec $0 \leq \alpha < n/2$ et $0 \leq \beta < n/2$. Par hypothèse de récurrence, α et β sont dans M et il en est donc de même pour $n = 2\alpha + 3\beta$.

. . . .

4. Que se passe-t-il si l'on remplace $\mathcal{B}$ par $\{1\}$ dans la définition ?

Ici, les nombres pairs ne peuvent pas être atteints, et M ne sera pas égal $\mathbb{N}$

. . . .

5. Que se passe-t-il si l'on remplace f par $f \ : \ (x, y) \longmapsto 2x + 6y$ dans la définition ?

Ici, les éléments de M seront tous multiples de 2 et M ne sera pas non plus égal $\mathbb{N}$

. . . .

5 Relation d'ordre

On définit la relation $\ll$ dans l'ensemble des couples d'entiers par $(a, b) \ll (c, d)$ lorsque
- $a \leq c$
- $a + b \leq c + d$

1. Comparer $(2, 5)$ et $(3, 6)$.

On a $(2, 5) \ll (3, 6)$ çar $2 \leq 3$ et $2 + 5 = 7 \leq 3 + 6 = 9$.

. . . .

2. Montrer que la relation $\ll$ est une relation d'ordre.

- $\ll$ est évidemment réflexive car $a \leq a$ et $a + b \leq a + b$.
- Supposons que $(a, b) \ll (c, d)$ et $(c, d) \ll (a, b)$. Alors $a \leq c$ et $c \leq a$ entraine que $a = c$ et $a + b \leq c + d = a + d$ entraine que $b = d$. Donc $\ll$ est antisymétrique.
- Enfin $\ll$ est transitive car $(a, b) \ll (c, d)$ et $(c, d) \ll (e, f)$ entraine que $a \leq c \leq e$ et $a + b \leq c + d \leq e + f$.

. . . .

3. Les couples $(2, 8)$ et $(3, 4)$ sont-ils comparables ? La relation $\ll$ est elle une relation d'ordre totale sur $\mathbb{N}$?

Les couples $(2, 8)$ et $(3, 4)$ ne sont pas comparables car même si $2 \leq 3$ on a $2 + 8 > 3 + 4$. La relation $\ll$ n'est donc pas un ordre total, mais partiel.

. . . .

4. Tracer le diagramme de Hasse de cette relation sur tous les couples d'entiers de somme plus petite ou égale à 3.

$$
\begin{array}{ccccccc}
(0,0) & - & (0,1) & - & (0,2) & - & (0,3) \\
 & & | & & | & & | \\
 & & (1,0) & - & (1,1) & - & (1,2) \\
 & & & & | & & | \\
 & & & & (2,0) & - & (2,1) \\
 & & & & & & | \\
 & & & & & & (3,0)
\end{array}
$$

5. Quels sont les majorants de $\{(2,8),\ (3,4)\}$?

Les majorants de $(2,8)$ et $(3,4)$ sont tous les couples (x,y) tels que $x \geq \max(2,3)$, $x+y \geq \max(2+8, 3+7)$, c'est à dire tels que $x \geq 3$ et $x+y \geq 10$.

6. Existe-il une borne supérieure de $\{(2,8),\ (3,4)\}$? Justifier votre réponse.

Soit $m = (3,7)$ d'après la question précédente, m est un majorant de $(2,8)$ et $(3,4)$. Si (x,y) est un autre majorant de $(2,8)$ et $(3,4)$, on a $x \geq 3$ et $x+y \geq 10$ et donc $m \ll (x,y)$, et m est bien la borne supérieure.

7. Montrer que $(\mathbb{N}^2,\ \ll)$ est un treillis.

En utilisant le raisonnement précédent, on voit que les éléments (a,b), (c,d) admettent pour borne supérieure $(\max(a,c), \max(a+b, c+d) - \max(a,c))$. Symétriquement, ils admettent pour borne inférieure $(\min(a,c), \min(a+b, c+d) - \min(a,c))$.