

Contrôle continu Mercredi 12 Novembre 2014

Durée : 1h30

Note :

Nom : _____
Prénom : _____

Toutes les réponses doivent être justifiées. Le correcteur attachera de l'importance à la qualité de rédaction. Les documents, calculatrices ou téléphones portables ne sont pas autorisés. Le barème, sur 30, est donné à titre indicatif.

1 Complexité (4 points)

On suppose dans cette partie qu'une instruction élémentaire est traitée en 10^{-12} secondes.

1. Quelle est le temps nécessaire au traitement d'une donnée de taille un million par un algorithme dont la complexité est n^2 ?

2. Quelle est la taille maximale que peut traiter un algorithme de complexité n^2 en une heure ?

2 Récurrence et complexité (6 points)

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n > 0$, on a

$$\sum_{i=1}^n \frac{i(i+1)}{2} = \frac{1}{6}n(1+n)(2+n)$$

.

2. Quelle est la classe d'équivalence de l'élément $(1, 2)$?

4 Ensembles dénombrables (4 points)

1. Montrer que l'ensemble F des mots finis commençant par 1 sur l'alphabet $\{0, 1\}$ est dénombrable.

2. L'ensemble I des suites infinies de 0 et de 1 est-il dénombrable ?

5 Induction (10 points)

On considère l'ensemble A des mots sur l'alphabet $\{a, b\}$ définis par induction de la manière suivante.

- Le mot vide ϵ est dans A
- Si u et v sont dans A , alors $f(u, v) = auav$ et $g(u) = bbu$ sont dans A

On considère également l'ensemble B des mots sur l'alphabet $\{a, b\}$ définis par induction de la manière suivante.

- Le mot vide ϵ est dans B
- Si u est dans B , alors $h(u) = aau$ et $k(u) = bbu$ sont dans B

1. Le mot $aabbaa$ appartient-il à A ? à B ? Justifiez votre réponse

2. Le mot $abbaaa$ appartient-il à A ? à B ? Justifiez votre réponse

3. Montrer que tous les mots de A et de B sont de longueur paire.

4. Est ce que $A \subset B$? Justifiez votre réponse.

5. Est ce que $B \subset A$? Justifiez votre réponse.
