

Durée : 1h30

Note :

Nom : \_\_\_\_\_  
Prénom : \_\_\_\_\_

Toutes les réponses doivent être justifiées. Le correcteur attachera de l'importance à la qualité de rédaction. Les documents, calculatrices ou téléphones portables ne sont pas autorisés. Le barème, sur 30, est donné à titre indicatif.

## 1 Complexité (4 points)

Calculer les complexités des algorithmes suivants

### 1.1 Algorithme 1

Algorithme 1

```
for (int i = 0; i < n; i++) {  
    for (int j = 0; j < i; j++) {  
        x = x + 1; }  
}
```

---

---

---

---

### 1.2 Algorithme 2

Algorithme 2

```
for (int i = 0; i < n; i++) {  
    for (int j = i; j < n-i; j++) {  
        x = x + 1; }  
}
```

---

---

---

---

---

---

## 2 Ordre de grandeur (4 points)

Donner l'ordre de grandeur des expressions suivantes :

1.  $f(n) = \frac{2}{3}n^2 - 3n + 1$

2.  $g(n) = \frac{n^2 \log(n) - n + \log(n)}{n-1}$

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## 3 Problème algorithmique (8 points)

On appelle **tableau de classement trié** tout tableau d'entiers positifs  $\{T[i]\}_{i=1}^n$  tel que

-  $T[1] = 1$

- Pour tout  $i < n$ ,  $T[i] \leq T[i + 1]$ , autrement dit  $T$  est un tableau trié.

- Pour tout  $i \leq n$ ,  $T[i] \leq i$

Un tableau sera dit **tableau de classement** lorsque  $Tri(T)$  est un tableau de classement trié, la procédure  $Tri$  étant une procédure de tri quelconque. Par exemple, le tableau  $(1, 2, 2, 2, 5, 6, 6, 8)$  est un tableau de classement trié, et  $(6, 8, 2, 1, 2, 6, 2, 5)$  est un tableau de classement.

1. Ecrire un algorithme  $TesteClassementTrie(T, n)$  qui teste si un tableau est un tableau de classement trié. Calculer sa complexité.

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

2. En déduire la complexité de l'algorithme  $TesteClassement(T, n)$  qui consiste tout d'abord à trier le tableau  $T$  puis lui appliquer la procédure  $TesteClassementTrie$

---

---

3. Ecrire un algorithme  $TesteClassement2(T, n)$  qui teste si un tableau est un tableau de classement sans exécuter de tri et sans utiliser de tableau auxiliaire. Quelle est sa complexité ?

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

4. Ecrire un algorithme  $TesteClassementLineaire(T, n)$  qui teste si un tableau est un tableau de classement, de complexité linéaire, en utilisant un tableau auxiliaire.

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

#### 4 Ensembles et Fonctions (6 points)

Soit  $f$  la fonction de  $\{1, 2, \dots, 10\}$  qui à un entier  $n$  lui fait correspondre l'ensemble de ses diviseurs pairs.

1. Préciser les ensembles de départ et d'arrivée de la fonction  $f$ .

---

2. Décrire  $f(i)$  pour  $i = 1 \dots 10$ . Décrire en extension (par ses éléments) l'ensemble  $A = \{x, x \notin f(x)\}$

---

---

---

---

---

3. Montrer qu'il ne peut pas exister d'entier  $a$  tel que  $f(a) = A$ .

---

---

---

## 5 Dénombrabilité (4 points)

1. L'ensemble des applications de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  est-il dénombrable ? Justifier votre réponse.

---

---

---

---

---

---

---

2. L'ensemble des applications de  $\{0, 1\}$  dans  $\mathbb{N}$  est-il dénombrable ? Justifier votre réponse.

---

---

---

---

---

---

---

## 6 Relations (4 points)

1. Dessiner le diagramme de Hasse de la relation divise sur l'ensemble  $A = \{2, 4, 6, 8, 12, 16, 24\}$ .

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

2. Préciser si l'ensemble  $A$  admet un plus grand élément, un plus petit élément, une borne supérieure, une borne inférieure.

---

---

---

---

---

---

---