

Contrôle continu Lundi 14 Décembre

Durée : 1h30

Note :

--

Nom : _____
Prénom : _____

Toutes les réponses doivent être justifiées. Le correcteur attachera de l'importance à la qualité de rédaction.

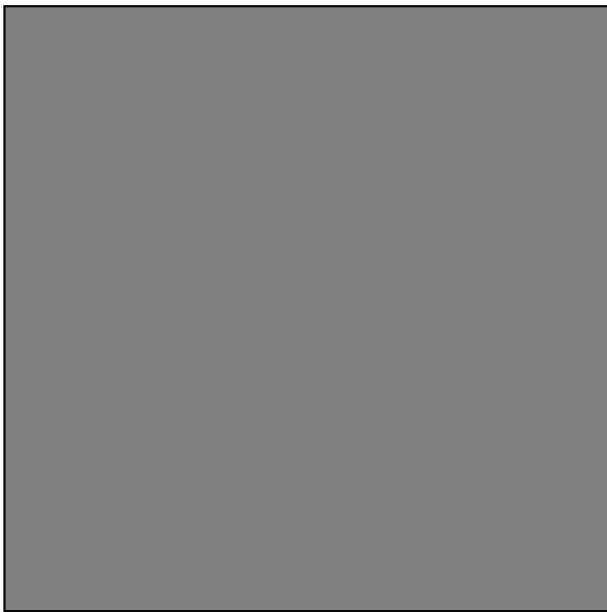
1 Question de cours : récurrences

Résoudre les récurrences

1. $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + n$ pour $n \geq 1$

2. $v_1 = 1$ et $v_{n+1} = 2v_n + 1$ pour $n \geq 1$

3. $w_1 = 1$ et $w_n = 2w_{\frac{n}{2}} + 1$ pour $n \geq 1$



2 Logique

Soient les prédicats $f(x)$: x est un facteur ; $v(x)$: x est un vélo ; $p(x, y)$: x possède y et $e(x, y)$: x égale y . Traduire en français les propositions suivantes :

1. $\forall x (v(x) \rightarrow (\exists z f(z) \wedge p(z, x)))$

2. $\forall x f(x) \rightarrow (\forall z \forall y (v(z) \wedge v(y) \wedge \neg e(z, y)) \rightarrow (\neg p(x, y) \vee \neg p(x, z)))$

3. $\exists x f(x) \wedge (\forall y v(y) \rightarrow \neg p(x, y))$

3 Problème

3.1 Partie I

Sur l'ensemble $\{a, b, c\}^*$, on considère le langage L des mots qui contiennent le facteur ca .

1. Donner tous les mots de L de longueur inférieure ou égale à 4.

2. Donner une expression rationnelle qui représente le langage L .

3. Ecrire un automate $\mathcal{A}(L)$ qui reconnaît le langage L . Déterminez le au besoin.

3.3 Partie III

Soit K le langage des mots sur $\{a, b, c\}^*$ défini par induction de la manière suivante

- La base est définie par $B = \{\epsilon\}$
- Si u est un mot de K alors il en est de même pour ua, ub, ucb .

1. Montrer par induction que le langage K est inclus dans M . Est-ce que l'on a $K = L$?

2. Décrire les mots de K par leurs propriétés.

3. Montrer que la définition inductive de K est non ambiguë et en déduire que le nombre K_n de mots de K de longueur n satisfait la récurrence $K_n = 2K_{n-1} + K_{n-2}$

4. Compléter les conditions initiales de cette récurrence et exprimer alors K_n en fonction de n .
