Nom :
Prénom :

Université de Nice-Sophia Antipolis
Licence Math-Info-BIM 2
Outils Formels pour l'Informatique 2010–2011

Contrôle continu Jeudi 4 Novembre

Durée : 1h30

Note :

Toutes les réponses doivent être justifiées. Le correcteur attachera de l'importance à la qualité de rédaction. Les documents, calculatrices ou téléphones portables ne sont pas autorisés. Le barême, sur 30, est donné à titre indicatif.

1 Relation d'ordre (3 points)

1. (1 point) Tracer le diagramme de Hasse de la relation divise dans l'ensemble $A = \{1, 2, ..., 10\}$

2. (1 point) Quels sont les éléments maximaux de A ?

3. (1 point) Quelle la borne supérieure de A dans $\mathbb{N}$

2 Dénombrement (4 points)

1. (1 point) Combien peut on former de numéros de téléphone à huit chiffres dans $\{0, 1, \ldots, 9\}$?

2. (1point) Combien peut on former de numéros de téléphone à huit chiffres formés de chiffres tous différents ?

3. (2 points) Combien peut on former de numéros de téléphone à huit chiffres formés des chiffres $\{0, 0, 2, 5, 5, 5, 6, 7\}$?

3 Complexité (3 points)

Calculer la complexité des programmes suivants. Vous donnerez une borne supérieure avec un $O()$ dans un premier temps et affinerez votre calcul en utilisant $\Theta()$.

listing 1

```
for (int i = 0; i < n; i++) {
    for (int j = i; j < n;  j++) {
    x = x + 3; }
  }
```

listing 2

```
for (int i = 0; i < n; i++) {
    for (int j = i; j < n-i;  j++) {
    x = x + 3; }
  }
```

listing 3

```
for (int i = 5; i < n; i++) {
    for (int j = i-3; j < i+3; j++) {
    x = x + 3; }
  }
```

4 Ensembles dénombrables (3 points)

Soit f l'application de $\mathbb{N}^2$ vers $\mathbb{N}\backslash\{0\}$ définie par $f(a,b) = 2^a(2b+1)$. Démontrer que cette application f est bijective. En déduire que l'ensemble $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.

5 Problème

5.1 Partie I (10 points)

On considére l'ensemble F des mots sur l'alphabet $\{a,b\}$ définis par induction de la manière suivante

- La base est définie par $B = \{\epsilon\}$
- Si u est un mot de F alors les mots $\phi(u) = ua$ et $\psi(u) = ubb$ appartiennent à F.

1. (1 point) Ecrire tous les mots de F de longueur plus petite ou égale à 4

2. (1 point) Exprimer le mot $aabbabbbb$ en fonction de ϕ, ψ et ϵ.

3. (2 points) Montrer par induction que les mots de F ont un nombre pair de b.

4. (3 points) Montrer qu'un mot sur l'alphabet $\{a,b\}$ appartient à F si et seulement si toute suite maximale de b consécutifs est de longueur paire.

   On note F_n le nombre de mots de F de longueur n.

5. (1 point) Calculer F_0, F_1, F_2 et F_3

6. (2 points) Montrer que la suite F_n est la suite de Fibonacci.

5.2 Partie II (7 points)

On définit dans F la relation $u \triangleleft v$ lorsque $|u| \leq |v|$ et que pour tout entier $k \leq |u|$ le préfixe de u de longueur k contient moins de lettres b que le préfixe de longueur k de v.

1. (2 points) Montrer que la relation $\triangleleft$ est une relation d'ordre sur F

2. (1 point) Cette relation est-elle un ordre total ?

3. (1 point) Donner au moins quatre majorants du mot $aabbabbbb$?

4. (2 points) L'ensemble F muni de la relation d'ordre $\triangleleft$ est il un treillis ? Pourquoi ?

5. (1 point) L'ensemble F muni de la relation d'ordre $\triangleleft$ est il un treillis complet ? Pourquoi ?