2. Ensembles et dénombrabilité

Ensembles et éléments

Un ensemble d'éléments est une collection d'objets distincts.

Un ensemble est défini par les éléments qu'il contient et qui lui appartiennent.

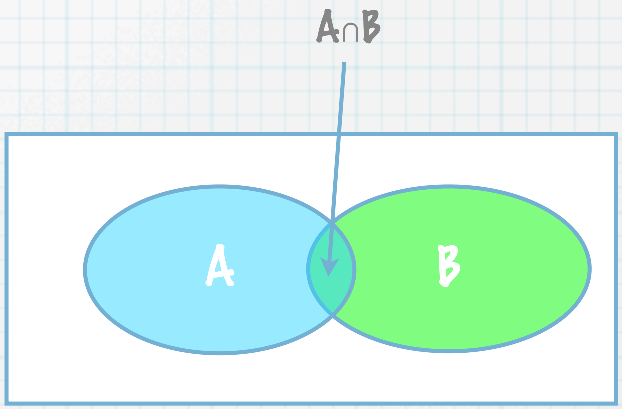
La relation d'appartenance d'un élément à un ensemble est notée $\in$ (ex: $x \in E$).

* L'unique ensemble qui ne contient aucun élément est l'ensemble vide, noté $\varnothing$
* Les éléments d'un ensemble ne sont pas ordonnés entre eux.
* Un ensemble peut être élément d'un autre ensemble, mais pas de lui-même ! (voir le paradoxe de Russell)

Calcul ensembliste

Opérations sur les ensembles:

* **Union** : $x \in A \cup B$ ssi ($x \in A$ ou $x \in B$)
* **Intersection** : $x \in A \cap B$ ssi ($x \in A$ et $x \in B$)
* **Complémentaire** : $x \in \overline{A} = C(A)$ ssi $x \notin A$
* **Différence** : $A \setminus B = A \cap \overline{B}$
* **Différence symétrique** : $A \Delta B = A \setminus B \cup B \setminus A$
* **Produit cartésien** : $(x,y) \in A \times B$ ssi $x \in A$ et $y \in B$



Note: deux ensembles sont dits **disjoints** si leur intersection est vide.

Calcul ensembliste

Soient A, B et C trois ensembles.

* **Commutativité :** $A \cup B = B \cup A$ $\quad A \cap B = B \cap A$
* **Associativité :** $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $\quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
* **Distributivité:**
    * De l'union par rapport à l'intersection (à gauche et à droite)

      $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $\quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
    * De l'intersection par rapport à l'union (à gauche et à droite)

      $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $\quad (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
* **Lois de Morgan :** $\overline{A \cup B} = \overline{B} \cap \overline{A}$ $\quad \overline{A \cap B} = \overline{B} \cup \overline{A}$

Fonction caractéristique

La fonction caractéristique d'une partie A d'un ensemble E est définie par

$$X_A : E \longrightarrow \{0,1\}$$

- $X_A(x) = 1$ si $x \in A$
- $X_A(x) = 0$ si $x \notin A$

On remarque que

- $X_{A \cap B}(x) = X_A(x)\, X_B(x)$
- $X_{A \cup B}(x) = X_A(x) + X_B(x) - X_{A \cap B}(x)$
- $X_{\bar{A}}(x) = 1 - X_A(x)$

Définition d'un ensemble

Un ensemble peut être défini :

* en extension: par la liste exhaustive de ses éléments
  * ex. {2,4,6,8}
* en compréhension: par une propriété vérifiée par ses éléments (en général déjà définis dans un (sur-)ensemble donné)
  * ex: les entiers naturels pairs (dans le sur-ensemble IN)

Exemples

Dans la sémantique de Java, un type primitif correspond à un ensemble de valeurs.

* le type boolean s'interprète comme l'ensemble {VRAI, FAUX}
* le type int, comme l'ensemble des entiers d'un intervalle $[-2^{32}, 2^{32}[$
* le type long, comme l'ensemble des entiers d'un intervalle $[-2^{64}, 2^{64}[$
* le type float, comme l'ensemble des nombres flottants à double précision (représentés sur 32 bits)
* le type double, comme l'ensemble des nombres flottants à double précision (représentés sur 64 bits) . Attention, ce n'est pas l'ensemble R, puisque c'est un ensemble fini (il n'y a que 2^{64} valeurs possibles), qui contient seulement certains nombres réels

Inclusion d'ensemble

- On dit qu'un ensemble E est inclus dans un ensemble F lorsque tout élément de E est également élément de F.
- La relation d'inclusion entre deux ensembles est notée $\subseteq$:
  $A \subseteq B$ ssi $(x \in A \Rightarrow x \in B)$
- donc $A=B$ ssi $(A \subseteq B$ et $B \subseteq A)$

Ensemble des parties d'un ensemble

* Etant donné un ensemble E, l'ensemble de ses parties est noté P(E)
  * $P(E)=\{A / A \subset E\}$
  * Attention, si $x \in E$, alors
    * $\{x\} \subset E$
    * $\{x\} \in P(E)$
* P(E) contient au moins $\varnothing$ et E comme éléments

Paradoxe de Russell

Il fut découvert par Bertrand Russell vers 1901 et publié en 1903. Il avait été découvert par Ernst Zermelo, autour de 1900, qui ne l'a pas publié

Considérons la définition E={F tel que F est un ensemble}, Autrement di, E est l'ensemble de tous les ensembles.

* On a une contradiction en remarquant que :
  * «F est un ensemble» est bien une propriété mais ici le sur-ensemble serait E lui-même...
  * Et donc, si E était un ensemble bien défini alors on aurait $E \in E$!

Paradoxe de Russell

* Raisonnement par l'absurde: si E est bien un ensemble, alors on peut aussi définir l'ensemble
    * A={G∈E tel que G∉G}
    * De deux choses l'une:
        * soit A∈A et alors A∉A ⇒ contradiction
        * soit A∉A et alors A∈A ⇒ contradiction aussi

D'où le paradoxe
L'ensemble de tous les ensembles n'existe pas !

Cardinalité

* Le cardinal d'un ensemble précise la notion de nombre d'éléments .
  On dira que deux ensembles ont même cardinalité lorsqu'il peuvent être mis en bijection.

* On distingue en particulier

  * Les ensembles finis (dénombrables au sens large), sont les ensembles qui peuvent être mis en bijection avec $\{1,2,\ldots,n\}$

  * Les ensembles infinis dénombrables, en bijection avec IN, de cardinal noté $\aleph_0$.

  * Les ensembles infinis non-dénombrables, impossibles à mettre en bijection avec IN.

Cardinaux finis

Le cardinal d'un ensemble E fini est noté $|E|$. Remarquons que $|E| = \Sigma_{x \in E} \chi_E(x)$

* Si E et F sont deux ensembles **disjoints** alors
  * $|E \cup F| = |E| + |F|$
  * Si (E_i) est une **partition** d'un ensemble E alors $|E| = \Sigma_i |E_i|$
* Si E et F sont deux ensembles quelconques alors $|E \cup F| = |E| + |F| - |E \cap F|$
* Formule du Crible (généralisation à n ensembles $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$)

Cardinaux finis

Soient E et F deux ensembles finis.

* Principe d'inégalité ou principe des tiroirs : (pigeon-hole principle)
    * Si $|E| > |F|$ alors il n'existe pas d'injection de E dans F.
* Interprétation équivalente :
    * Si n objets sont dans m tiroirs et si $n>m$, alors il existe au moins un tiroir qui contient au moins deux objets.
    * Si n pigeons nichent dans m trous, alors il y a au moins deux pigeons dans un même trou
        * Exemple. Parmi n nombres entiers, au moins deux d'entre eux ont une différence divisible par n-1

Cardinaux finis

* Soient E, F des ensembles finis.
* Principe multiplicatif
  * $|E \times F| = |E| * |F|$
  * Généralisation à n ensembles
* Principe d'égalité
  * Il existe une bijection entre E et F ssi $|E| = |F|$

Ensembles dénombrables

* L'ensemble IN des nombres entiers est dénombrable
* L'ensemble des entiers naturels non nul est dénombrable
* L'ensemble des nombres entiers pairs est dénombrable
* L'ensemble des mots finis sur l'alphabet {0,1} est dénombrable
* Théorème. Toute partie d'un ensemble dénombrable est finie ou dénombrable.

L'ensemble $\mathbb{N}^2$ est dénombrable

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	2	5	9	14	20			
1	1	4	8	13	19				
2	3	7	12	18					
3	6	11	17	24					
4	10	16	23						
5	15	22							
6	21								
7									
8									

Théorème. Le produit cartésien de deux ensembles dénombrables est dénombrable

L'ensemble [0,1[est infini non dénombrable

* Argumentation : diagonale de Cantor
  - Si [0,1[était dénombrable alors [0,1[$=\{x_i, i \in \mathbb{N}\}$.
  - Tout réel x_i admet un écriture décimale illimitée $x_i=0,x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_i}\ldots$ où $i_k \in \{0,1,2,\ldots,9\}$
  - Considérons alors une suite d'entier y_n de $\{0,1,2,\ldots,8\}$ tq
    - $y_n \neq x_{n_n}$ pour tout entier n
  - Alors $y=0, y_0\, y_1\, y_2 \ldots y_n \ldots$ est différent de chacun des x_i