1. Complexité des algorithmes

Commentaires

* Si on considère qu'une instruction est réalisée en 10^{-8}s, la taille des données que peut traiter un algorithme en un temps donné est fourni par le tableau suivant

temps	O(1)	O(log(n))	O(n)	O(n.log(n))	O(n^2)	O(n^3)	...	O(2^n)	O(n!)
1 sec	∞	$10^{43\,429\,448}$	10^{+8}	$6\,10^{+6}$	10^{+4}	464		26	12
1 mn	∞	∞	$6\ 10^{9}$	$3\ 10^{8}$	$8\ 10^{4}$	1817		32	13
1h	∞	∞	$4\ 10^{11}$	$2\ 10^{10}$	$6\ 10^{5}$	7113		38	16
1 mois	∞	∞	$3\ 10^{14}$	$9\ 10^{12}$	$2\ 10^{7}$	63759		47	17
								56	19
								63	21

Commentaires

* Si on considère qu'une instruction est réalisée en 10^{-8}s, le temps necessaire au traitement d'une donnée de taille n est fourni par le tableau suivant

Taille	O(1)	O(log(n))	O(n)	O(n.log(n))	O(n^2)	O(n^3)	...	O(2^n)	O(n!)
10	10^{-8}	$2\ 10^{-8}$	10^{-7}	$2\ 10^{-7}$	10^{-6}	10^{-5}		10^{-5}	1 mn
100	10^{-8}	$5\ 10^{-8}$	10^{-6}	$5\ 10^{-6}$	10^{-4}	10^{-2}		$4\ 10^{12}$ siècles	∞
1000	10^{-8}	$7\ 10^{-8}$	10^{-5}	$7\ 10^{-5}$	10^{-2}	10		∞	∞
10 000	10^{-8}	$9\ 10^{-8}$	10^{-4}	10^{-3}	1	3h		∞	∞
1000000	10^{-8}	10^{-7}	10^{-2}	10^{-1}	3 h	3 siècles		∞	∞

3 . Relations, fonctions et ordres

Relations binaires

* Un couple est une paire ordonnée d'éléments.
  - Exemples : les points (x,y) du plan de $\mathbb{N}^2$ ou de $\mathbb{R}^2$, les nom et prix d'un produit,
* Le produit cartésien de E par F est l'ensemble de tous les couples que l'on peut former à partir d'un élément de E et un élément de F.

  $E \times F = \{ (e,f) \ / \ e \in E \text{ et } f \in F \}$

* Une relation binaire R de E dans F est une partie de $E \times F$: $R \subseteq E \times F$
* Si E = F, on parle de relation sur E
  - ex: l'inclusion sur E=P(IN).

Relations binaires

* Pour tout couple (e,f) de R, e est dit **en relation avec** f.

  (e,f) $\in$ R se note également **e R f**

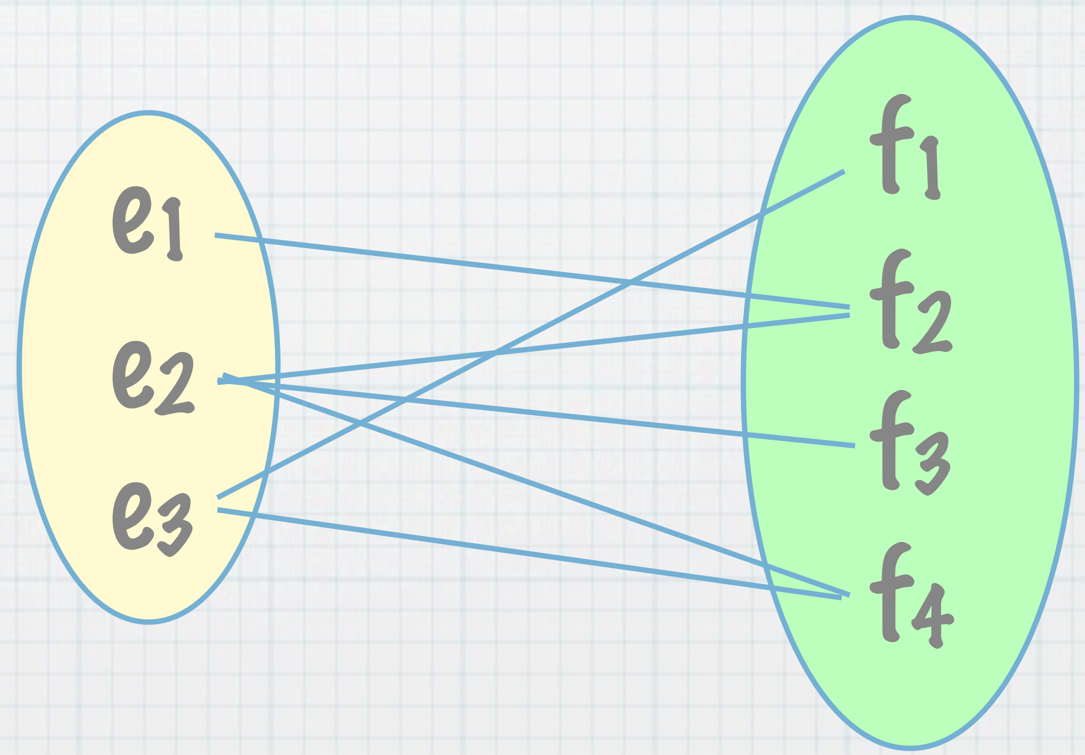
* La relation binaire « vide » correspond au sous-ensemble $\emptyset$ de E $\times$ F.

Représentations d'une relation

* Matrices binaires

	f_1	f_2	f_3	f_4
e_1	0	1	0	0
e_2	0	1	1	1
e_3	1	0	0	1

* Diagramme sagittal (diagrammes sagittaux)



Exemples

* la droite y=2x+1 :
  - {(0,1),..., (1/2,2),..., (1,3),...,(2,5),...,(3,7), ...,(4,9),...}
* la relation « est parent de » dans une famille :
  - {(Alice, Bob), (Alice, Chloé), (Dan, Elsa), (Dan, Bob), (Dan, Chloé), (Jules, Alice)}
* ordre strict ou non sur les entiers
  - (0,1) est noté 0 < 1
  - ou (0,1) est noté 0 ≤ 1
* ordre alphabétique (a,z) est noté
  - a $<_{alph}$ z
* relation d'égalité
  - (1,1) est noté 1 = 1
* relation de divisibilité
  - (12,132) est noté 12 | 132
* fonction successeur sur les entiers
  - (7,8) est noté succ(7)=8
* relation d'inclusion sur les parties d'un ensemble
  - ∅ ⊆ {a}
  - {a} ⊆ {a,b,c}

Propriétés

* réflexivité — pour tout x, $x \mathcal{R} x$
* irréflexivité — pour tout x, $x \not\mathcal{R} x$
* symétrie — $x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$
* antisymétrie — $(x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} x) \Rightarrow x = y$
* transitivité — $(x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} z) \Rightarrow x \mathcal{R} z$

Remarque :

- Une relation irréflexive et transitive est toujours antisymétrique, comme par exemple l'ordre strict $<$ sur $\mathbb{R}$.

Relations d'équivalence

* Une relation d'équivalence est une relation sur un ensemble E:
  - Réflexive
  - Symétrique
  - Transitive
* Une relation d'équivalence R induit une partition de cet ensemble en classes d'équivalence.
  - L'ensemble des classes est l'ensemble quotient E/R.
  - Deux éléments en relation sont dans la même classe.
* Exemples :
  - les congruences : la congruence modulo 3 par exemple
  - l'égalité : que sont les différentes classes d'équivalence ?
  - les « cohortes » utilisées en démographie : la population française est partagée en classes d'individus tous nés la même année

Fonctions

* Une **fonction** f d'un ensemble E dans un ensemble F est une relation R qui vérifie la propriété (x R y et x R y') $\Rightarrow$ y = y'

* On note habituellement f(x) = y au lieu de x R y . On dit que

  - y est **l'image** de x par f

  - x est un **antécédent** de y par f.

* Le **domaine de définition** d'une fonction f est l'ensemble des éléments de E qui ont une image par f.

* Une **application** de E vers F est une fonction qui associe une image à tout élément de l'ensemble de départ, autrement dit une fonction dont le domaine de définition est l'ensemble E tout entier.

Propriétés des fonctions

* Une application f de E dans F est dite
  - **Injective** quand tout élément de F a au plus un antécédent
  - **Surjective** quand tout élément de F a au moins un antécédent
  - **Bijective** quand tout élément de F a exactement un antécédent, c'est à dire quand elle est à la fois injective et surjective
* Si les ensembles E et F sont finis et de même cardinalité ($|E| = |F|$), alors ces 3 propriétés sont équivalentes

Composition de fonction

* Soient f une fonction de E vers F et g une fonction de F vers G.

On appelle **composée** des fonctions f et g la fonction notée $g \circ f$ définie par

$$\begin{aligned} g \circ f : E &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto g \circ f(x) = g[f(x)] \end{aligned}$$

Relations d'ordre

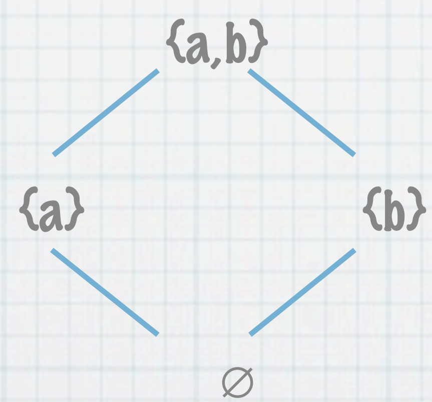
* Une relation d'ordre $\leq$ sur un ensemble est une relation
  - Réflexive
  - Antisymétique
  - Transitive
* En anglais, et en français, on dit que $(E,\leq)$ est un poset (partially ordered set).
* Un ordre $\leq$ est dit **total** quand on a : $x \neq y \Rightarrow (x \leq y$ ou $y \leq x)$ c'est à dire lorsque deux éléments quelconques sont toujours comparables.
* Un ordre non total est dit **partiel**.

Exemples

* Ordres totaux
  - ordre $\leq$ sur les nombres
  - ordre lexicographique sur les mots
* Ordres partiels
  - relation de divisibilité
  - inclusion sur les ensembles
  - toutes les comparaisons multi-critères ... comment comparer des voitures, des pays
  -

Représentations d'un ordre

* **Graphes orientés**
  - On peut choisir de faire figurer ou non les relations de réflexivité.
  - On aura des graphes « avec boucles » ou « sans boucle ».
* **Diagrammes de Hasse**
  - Par définition, on ne fait pas figurer les relations de réflexivité ni celles déduites de la transitivité. On ne fait pas non plus figurer le sens de la relation par des arcs mais on oriente le diagramme dans son entier (les éléments les « plus petits » en bas ou à gauche)
  - Ex : $(P(\{a,b\}), \subseteq)$



  - $(\mathbb{N}, \leq)$ 0 —— 1 —— 2 —— 3 —— 4 —— 5 —— 6 —— 7 ——
  - Divisibilité dans $\mathbb{N}$

Linéarisation d'un ordre

- Tout ordre partiel peut être étendu à un ordre total.
- Algorithme du tri topologique

  Il s'applique au graphe d'un quasi-ordre.

  - Tant que le graphe contient un sommet :
    - 1) on choisit un sommet sans prédécesseur
    - 2) on le retire du graphe
  - La liste ordonnée des sommets retirés est une linéarisation de l'ordre initial. Elle définit un ordre total compatible avec l'ordre partiel de départ, c'est-à-dire qu'il le contient.

  Remarque : Plusieurs linéarisations peuvent être obtenues, selon les choix faits aux étapes 1) de l'algorithme.

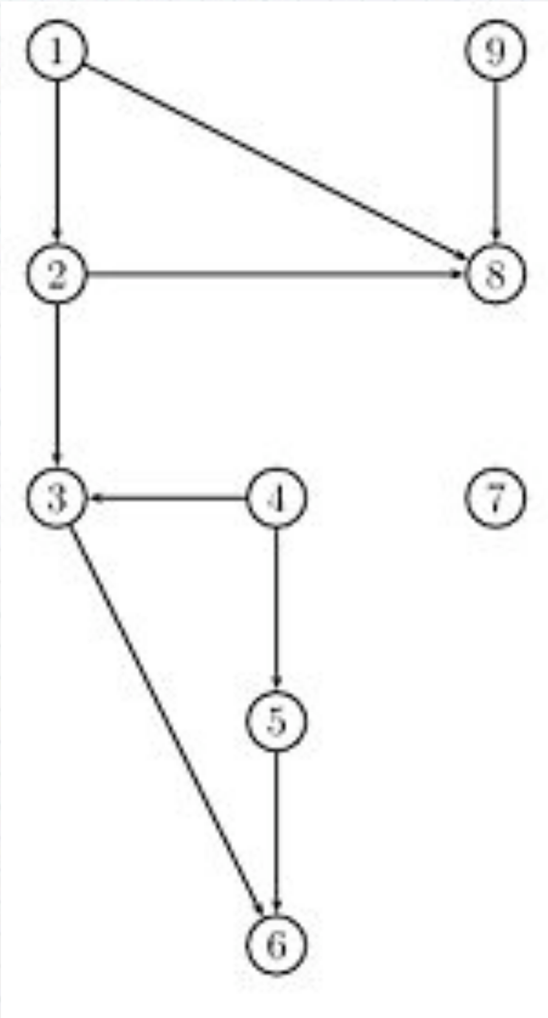
Linéarisation d'un ordre

* Soi S le graphe
  S={(1,2),{1,8},{2,3},{2,8}, {3,6},{4,3},{4,5},{5,6},{9,8}}

* Algorithme du tri topologique

  Un ordre total possible est

  S'={7,1,2,9,8,4,3,5,6}

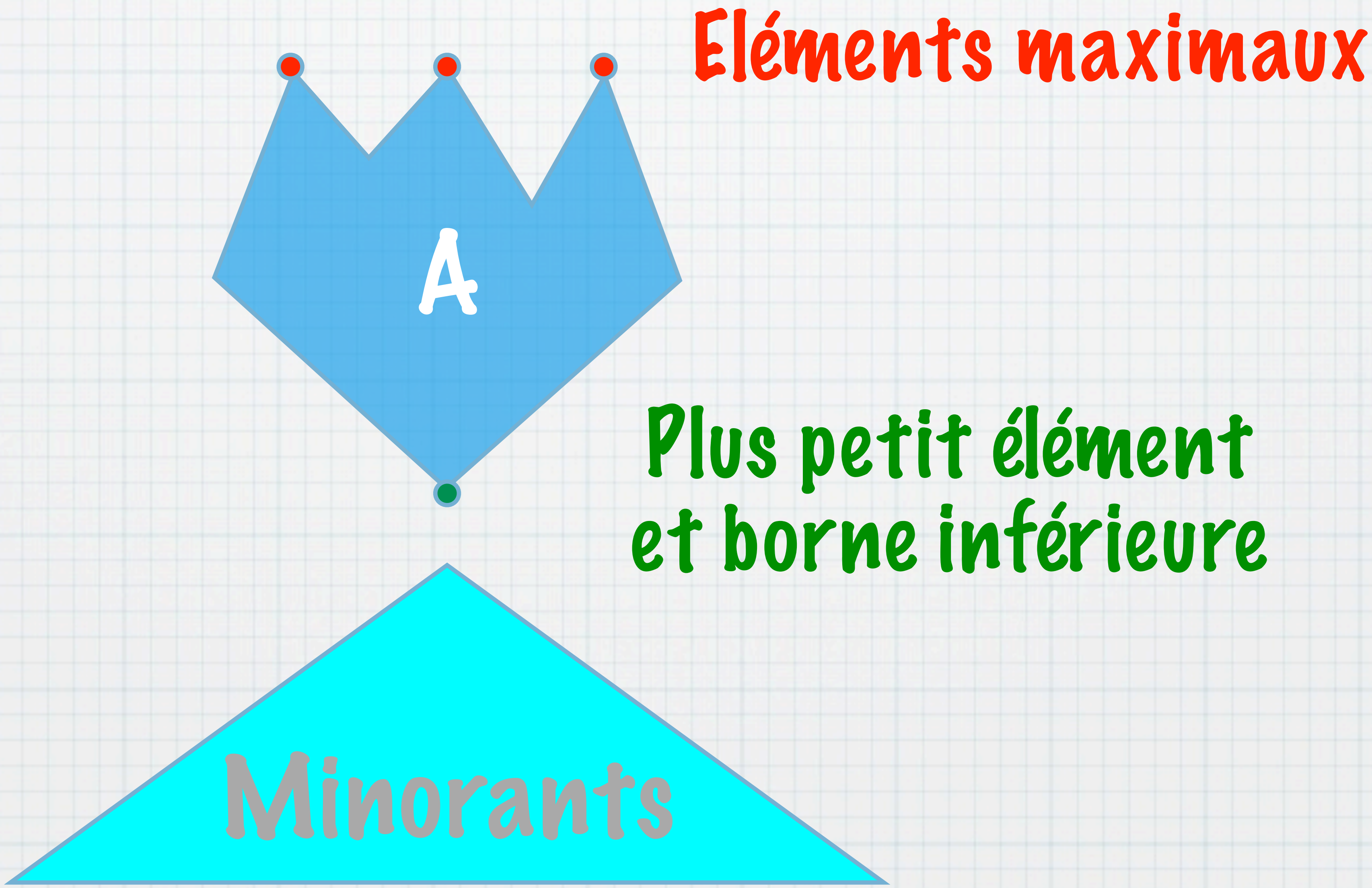


Vocabulaire

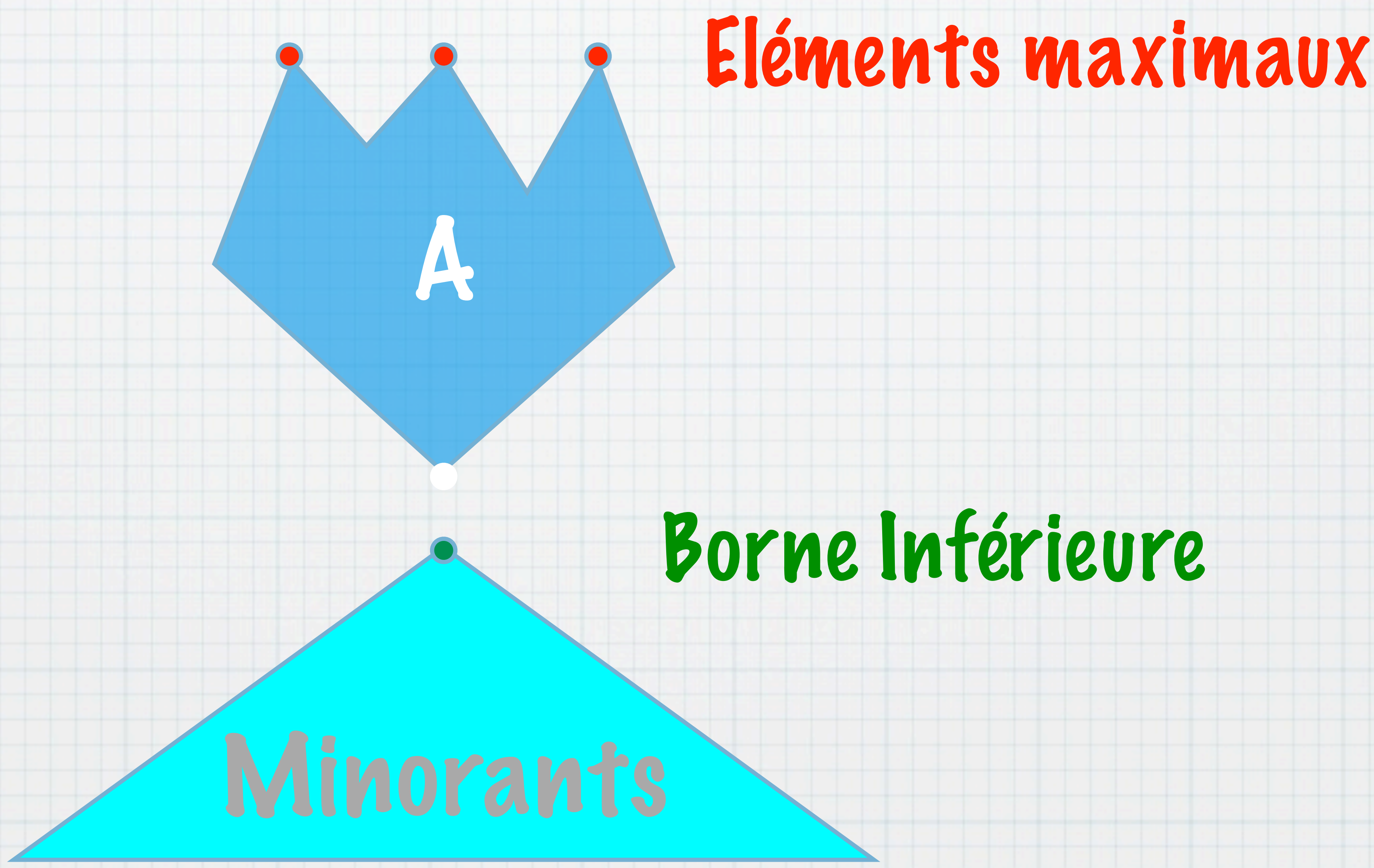
Soit A une partie d'un ensemble ordonné E.

* On appelle **majorant** (resp. **minorant**) de A tout élément de E qui plus grand (resp. plus petit) que n'importe lequel des éléments de A
* On appelle **plus grand élément** de A (resp **plus petit élément**) tout élément **de A** qui est plus grand (resp. plus petit) que tous les autres élément de A
* On appelle **élément maximal** (resp. **minimal**) de A tout élément de A qui n'admet pas d'éléments plus grand (resp. plus petit) que lui dans A. On parle aussi d'élément **non dominé** (resp. **non dominant**)
* On appelle **borne supérieure**, lorsqu'elle existe le plus petit des majorant
* On appelle **borne inférieure**, lorsqu'elle existe le plus grand des minorants

Vocabulaire



Vocabulaire

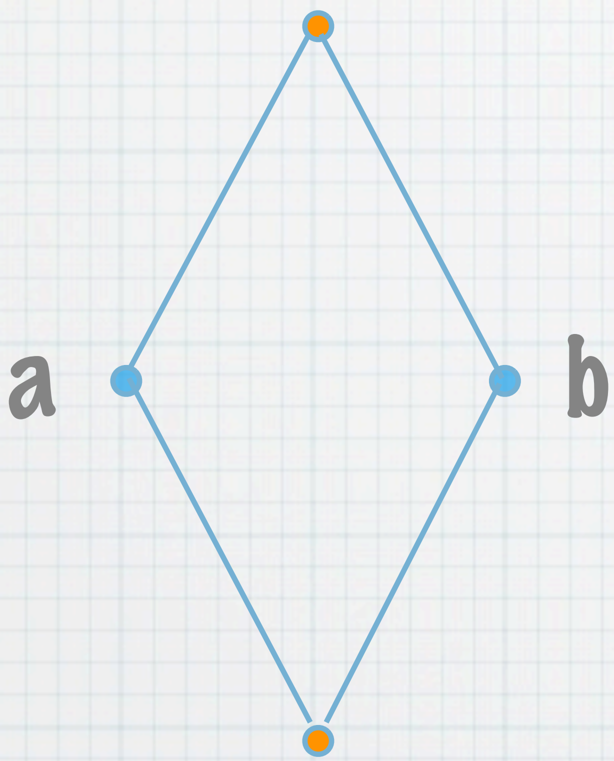


Treillis

* Un treillis est un ensemble ordonné dans lequel chaque couple d'éléments admet une borne supérieure et une borne inférieure.
  * Exemple N^+ muni de la division
* Un treillis est dit complet si toute partie (finie ou infinie) admet une borne supérieure et une borne inférieure
  * Exemple P(E) muni de l'inclusion

Treillis

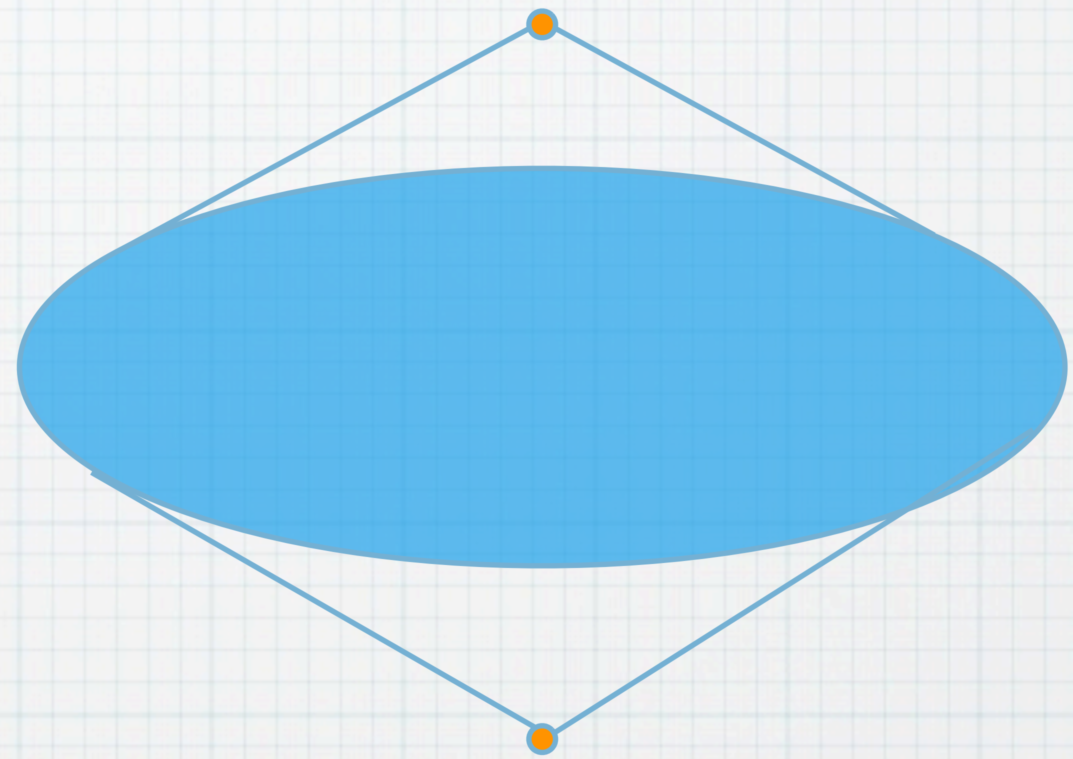
plus petit des majorants



plus grand des minorants

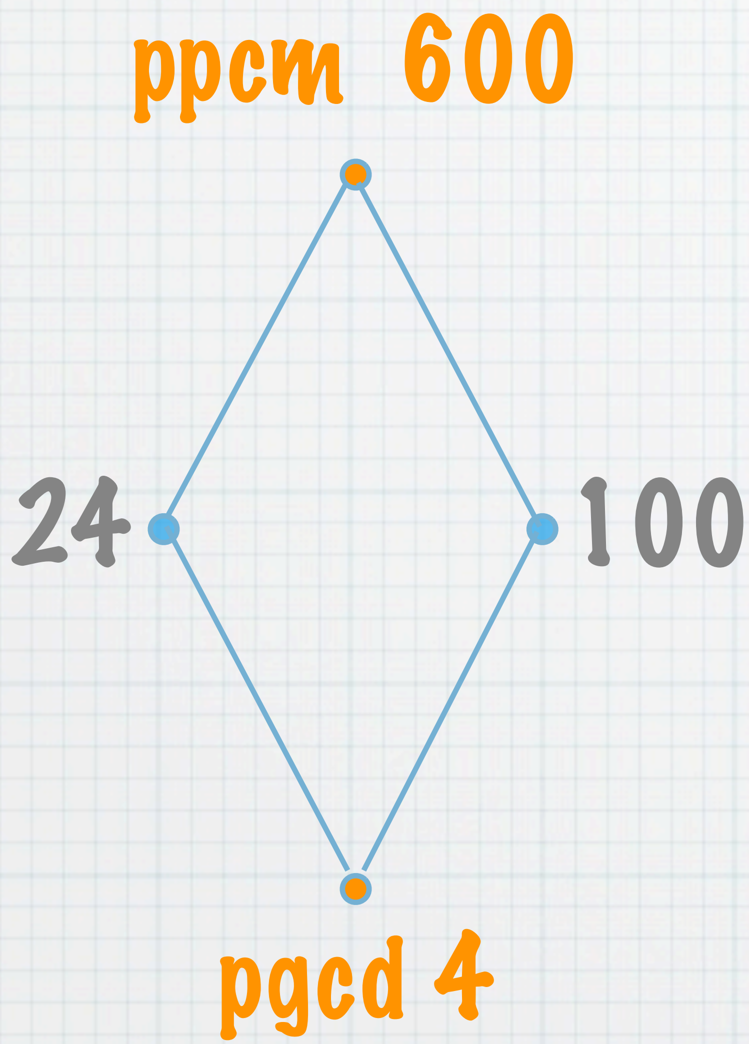
Treillis complet

plus petit des majorants

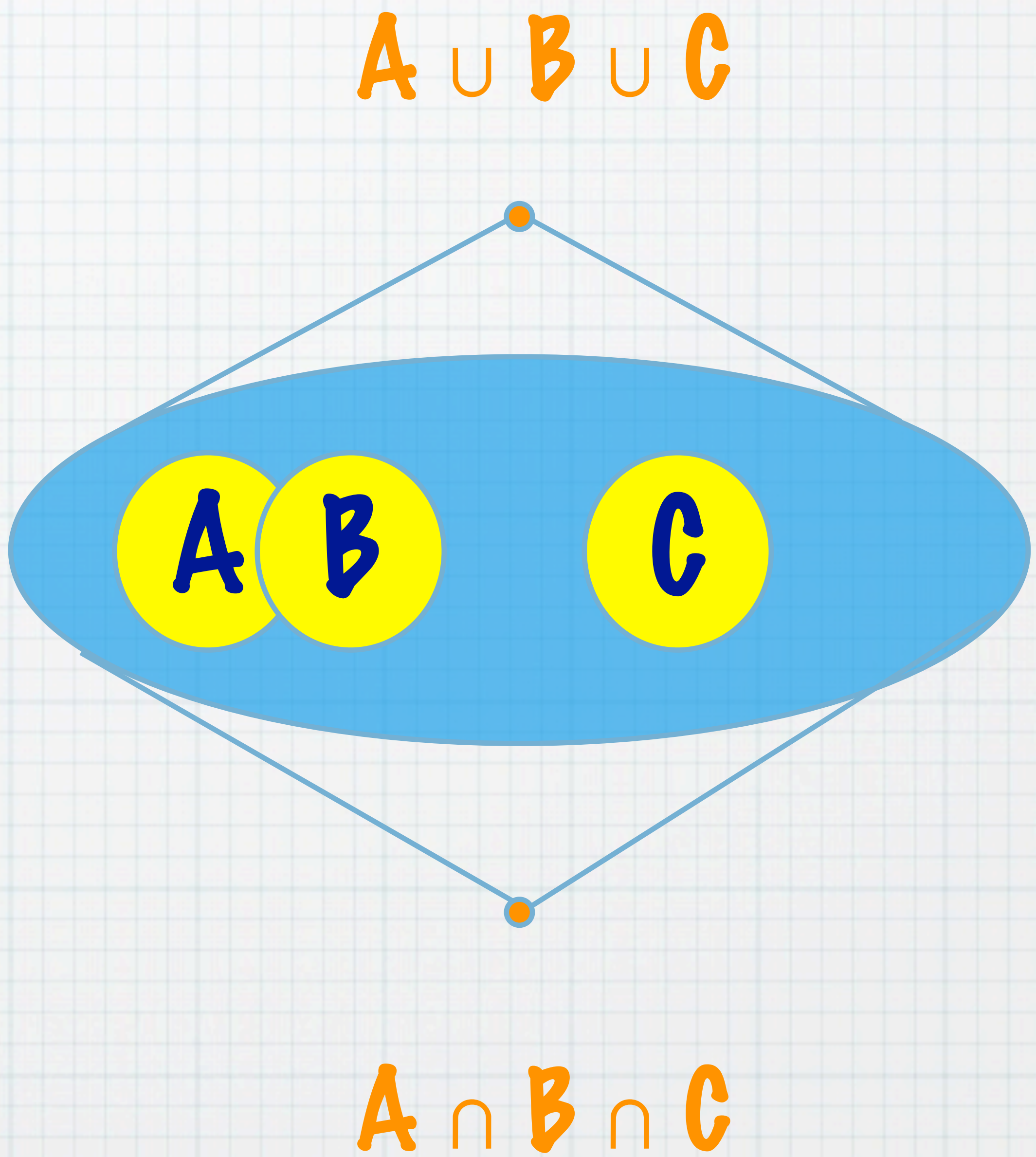


plus grand des minorants

Treillis
(IN, |)



Treillis complet
(P(E), ⊂)



Théorème de point fixe (Tarski- 1955).

Toute fonction monotone d'un treillis complet dans lui même admet un point fixe.

Preuve. Soit T un treillis complet et f une fonction croisante de T dans T.

* Considérons $A=\{x/x\leq f(x)\}$ et remarquons que, pour tout x de A, f(x) est aussi dans A car f est croissante.
* Appelons m la borne supérieure de A, qui existe car T est un treillis complet.
  * L'élément m étant un majorant de A, on a $x \leq m$ pour tout x de A.
  * Mais puisque f est croissante, pour tout x de A, on a également $x\leq f(x) \leq f(m)$ et donc f(m) est un majorant de A.
  * L'élément m étant le plus petit d'entre eux, on a donc $m\leq f(m)$.
  * L'élément m est donc dans A, et f(m) l'est aussi et on a donc $f(m)\leq m$ car m est un majorant de A.
* Par conséquent m est le point fixe recherché.

Applications

* **Théorème de Schröder-Bernstein** : s'il existe une injection de A vers B et une injection de B vers A, alors il existe une bijection de A vers B
* **Informatique**. Les théorèmes de point fixes sont un outil essentiel dans la vérification de programme et dans la sémantique des langages de programmation.