5. Dénombrement

Dénombrement

* L'étude du nombre de permutations, d'arrangements, de combinaisons ou de partitions (...) s'appelle traditionnellement en mathématiques l'analyse combinatoire.
* Elle est omniprésente en informatique. La résolution de nombreux problèmes consiste en l'énumération exhaustive des possibilités pour ensuite décider pour chacune si elle est solution ou non au problème.
* Plusieurs autres raisons à cette omniprésence :
    * codage des données en binaire
    * propriétés combinatoires des structures de données
    * programmation itérative ou récursive
    * estimation du temps de calcul des algorithmes en fonction de la taille des entrées

Temps d'exécution

* Par exemple, on implémente un programme pour lister toutes les parties de l'ensemble E à n éléments. Il y en a 2^n.
* Supposons pour simplifier que pour calculer et éditer une partie, l'ordinateur prenne une µ-seconde (10^{-6}s) :

|E|	0	10	20	30	40	50	60
Temps	1 µs	1,024 ms	1,048 s	17,9 mn	12,7 jours	35,7 ans	366 siècles

Problème du voyageur de commerce

* Toutes les villes d'une région sont reliées deux à deux. Le VRP habite dans l'une et doit visiter plusieurs clients, un dans chacune des villes voisines. On cherche le chemin le plus court lui permettant de parcourir toutes les villes sans jamais repasser deux fois dans la même sauf la sienne, au départ et à l'arrivée.
* On pense à un algorithme naïf :
  * on énumère tous les parcours possibles
  * on sélectionne le (ou les) plus court(s).
* Le seul hic est que pour n un peu grand, la réponse de l'ordinateur peut prendre ... des lustres !
  * Il existe des algorithmes + efficaces, mais non déterministes, qui utilisent les algorithmes génétiques.

Permutations

* Soit E un ensemble fini à n éléments. On appelle **permutation** de E toute bijection de E dans E.

  Le nombre de permutations de E est égal à n!

* En effet, pour $n>1$, il y a
  * n choix pour le 1er élément de la permutation,
  * $n-1$ choix pour le 2d élément
  * ... 2 choix pour l'avant dernier1 seul pour le dernier.
* On multiplie le nombre de toutes ces possibilités soit n!
* Une permutation est aussi une suite ordonnée sans répétition ni omission d'éléments de E.

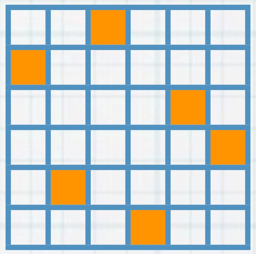
La factorielle

* L'ordre de grandeur de la factorielle est n^n.
* Une approximation de la factorielle est donnée par la formule de Stirling
  * $n! = \sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n\,(1 + \Theta(1/n))$
* Exemple L'algorithme précédent doit énumérer toutes les permutations des villes du voisinage.
  * Pour n villes, il y a n-1 villes voisines donc (n-1) ! parcours d'où un temps d'exécution prohibitif de l'algorithme.
  * A ce jour, on ne connaît pas d'algorithme permettant de résoudre ce problème en un temps acceptable quand n est très grand.

Représentations d'une permutation

* Une permutation α est habituellement représentée par la suite de ses images ($\alpha(1)$, $\alpha(2)$,..., $\alpha(n)$), comme par exemple $\alpha = 2\ 5\ 1\ 6\ 3\ 4$

* Une autre représentation est sa matrice



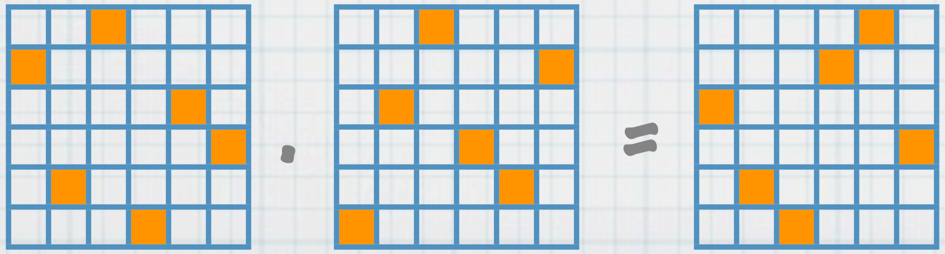
* On peut aussi représenter une permutation par sa **décomposition en cycles** $\alpha = (1, 2, 5, 3)(4, 6)$

* L'ensemble des permutations de $\{1,2,...,n\}$ est noté **Sn**. Muni de l'opération de composition, Sn est a une **structure de groupe**.

    * $\alpha^{-1} = 3\ 1\ 5\ 6\ 2\ 4$

    * Si $\beta = 6\ 3\ 1\ 4\ 5\ 2$ on a $\beta^{-1} =$

        * $\beta\alpha = 3\ 5\ 6\ 2\ 1\ 4$ et $\beta\alpha =$, , , , ,



Permutations circulaires

* Une permutation a sur $\{1,2, \ldots,n\}$ est dite circulaire lorsque

  $\{a^k(1) , k\geq 0\} = \{1,2,\ldots, n\}$

* Une permutation circulaire de deux éléments est appelée une transposition.
* Propriétés
  * Il y a $(n-1)!$ permutations circulaires sur $\{1,2,\ldots,n\}$
  * Toute permutation peut être décomposée en produit de cycles disjoints
  * Toute permutation peut être décomposée en produit de transpositions

Arrangements

* Soit E un ensemble fini à n éléments. On appelle arrangement de p éléments de E avec $p \leq n$ toute suite ordonnée et sans répétition de p éléments de E.
* Le nombre d'arrangements de p éléments de E est égal à

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

* Un arrangement de p éléments pris parmi n peut être vu comme les premiers p éléments d'une permutation de n éléments.
  * Chaque arrangement de p éléments donne donc lieu à $(n-p)!$ permutations.
* Exemple
  * Pour 12 chevaux au départ, il y a 1320 tiercés possibles.

Arrangements avec répétition

* Soit E un ensemble fini à n éléments. On appelle arrangement avec répétition de p éléments de E toute application de {1,...,p} dans E. On en compte n^p

* Il y a en effet

  n choix pour le 1er élément

  n choix pour le 2d

  n choix pour le pième.

* Exemple

  * Combien existe-il d'octets ? $2^8=256$.

  * On peut en déduire le nombre d'entiers de type byte, short, int et long en Java, sachant qu'ils sont codés sur 1, 2, 4 et 8 octets.

Combinaisons

* On appelle combinaison de p éléments pris parmi n éléments dans E toute partie de E à p éléments.

* Le nombre de combinaisons de p éléments pris parmi n égale

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

* Une combinaison ne tient pas compte de l'ordre des éléments, ainsi un arrangement de p éléments pris parmi n donne lieu à p! combinaisons.

* Exemple

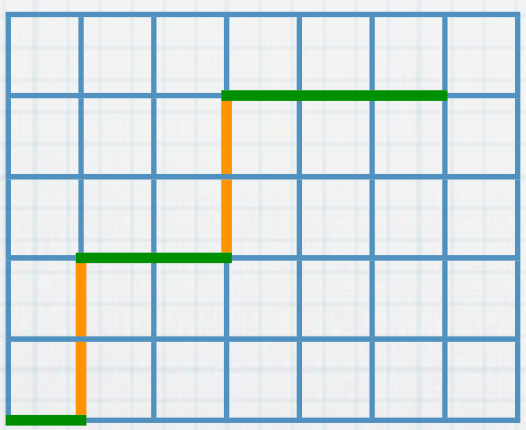
  * On pourrait vérifier que la somme du nombre des combinaisons pour les p variant de 0 à n redonne bien 2^n, le cardinal des parties de E ...

Représentations d'une combinaison

* Une combinaison de p éléments parmi n peut être représenté par un mot binaire de longueur n comportant exactement p lettres égales à 1.

* On peut aussi représenter une combinaison par un chemin

  * Exemple : {2, 3, 6, 7} dans {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} peut être représenté par le mot 0110011000.



  * Quel est la combinaison représentée par 1101000111 ?

Triangle de Pascal

1									
1	1								
1	2	1							
1	3	3	1						
1	4	6	4	1					
1	5	10	10	5	1				
1	6	15	20	15	6	1			
1	7	21	35	35	21	7	1		
1	8	28	56	70	56	28	8	1	
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

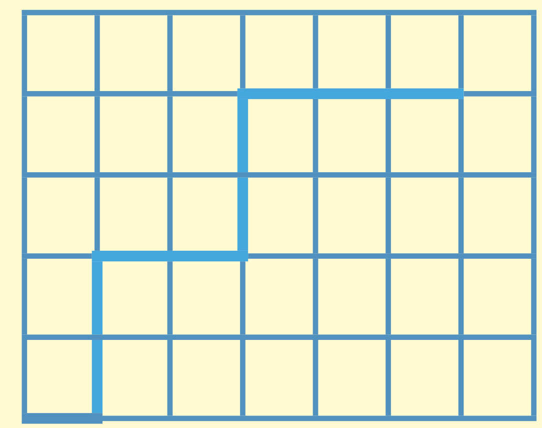
$$C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$$

Triangle de Pascal

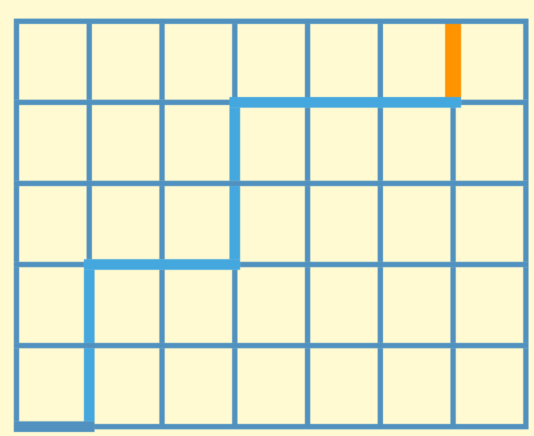
$$C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$$

1									
1	1								
1	2	1							
1	3	3	1						
1	4	6	4	1					
1	5	10	10	5	1				
1	6	15	20	15	6	1			
1	7	21	35	35	21	7	1		
1	8	28	56	70	56	28	8	1	
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

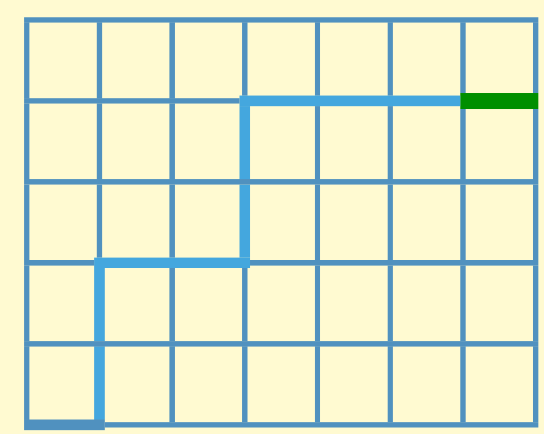
Tout chemin de la forme



peut être prolongé de deux manières



ou



Propriétés

* Les C_n^p sont aussi appelés les coefficients binomiaux. Ils sont obtenus après développement du binôme de Newton

$$(a + b)^n = \sum_{0 \leq i \leq n} C_n^i \, a^i b^{n-i}$$

* Preuve par récurrence sur n
  * Pour n=0, on a bien $(a + b)^0 =$, ou pour n=1, $(a + b)^1 = a^0 b + a b^0$
  * on suppose l'égalité vraie à l'ordre n, et on calcule à l'ordre n+1 :

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n (a+b) = \left[\sum_{0 \leq i \leq n} C_n^i a^i b^{(n-i)}\right](a+b)$$

$$= \sum_{0 \leq i \leq n} C_n^i a^{i+1} b^{(n-i)} + \sum_{0 \leq i \leq n} C_n^i a^i b^{(n+1-i)}$$

$$= \sum_{0 \leq j \leq n+1} \left[C_n^j + C_n^{j-1} \right] a^j b^{(n+1-j)} = \sum_{0 \leq i \leq n+1} C_{n+1}^i a^i b^{(n+1-i)}$$

Mots de {a,b}* contenant autant de a que de b

* Soit GD l'ensemble des mots qui ont autant de a que de b
  * GD={ε,ab , ba, aabb, abab, abba,baab, baba,bbaa, ...}
  * Le nombre de mots de l'alphabet {a,b}* contenant autant de a que de b est ......

Combinaisons avec répétitions

Soit E un ensemble fini à n éléments. On appelle combinaison avec répétition de p éléments pris parmi n éléments de E toute application f de E dans {1,...,p} qui vérifie $f(e1) + ... + f(en) = p$

Théorème. On en dénombre C_{n+p-1}^{n-1}

* C'est aussi le nombre de solutions entières de l'équation $x1 + ... + xn = p$

* Exemple Sur l'alphabet {a,b,c}, on associe à chaque mot w le groupe des lettres qui le constituent. Il y a 9 mots de 2 lettres : aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc associés aux groupes [a,a],[a,b],[a,c],[b,b],[b,c] et [c,c].

  * On considère la fonction qui à une lettre associe son occurrence. La somme des occurrences $|w|_a$, $|w|_b$ et $|w|_c$ égale la longueur du mot.

Interprétation

* On code la combinaison avec répétition de {1,..., 6} r={1,1,2,3,3,6,6,6} par xx#x#xx###xxx
* Plus généralement, on code une combinaison avec répétition de {e1,e2,...,en} par un mot sur les deux lettres { x,#} de la manière suivante
  * Le nombre de x avant le premier marqueur # indique le nombre de e_1.
  * le nombre de lettres x entre les $i^{ème}$ et $(i+1)^{ème}$ marqueurs # indique le nombre de répétitions de l'élément e_{i+1}.
  * Le nombre de x après le $(n-1)^{ème}$ et dernier marqueur # indique le nombre de e_n.
* il y a bien C_{n+p-1}^{n-1} possibilités.

Nombre de partitions

* Soit E un ensemble fini à n éléments. On effectue une partition de E en k ensembles non vides $(X_i)_{1\leq i\leq k}$ de cardinaux respectifs $(x_i)_{1\leq i\leq k}$.

* Théorème Le nombre de partitions possibles est égale à $\dfrac{n!}{x_1!\,x_2!\ldots x_k!}$

* Preuve par récurrence
  * Pour k = 1 : (n!) / x1!
  * Pour k=2, on retrouve la formule du binôme
  * On suppose la propriété vraie à l'ordre 2 et à l'ordre k. A chaque partition $(X_1, X_2, \ldots, X_k, X_{k+1})$ on lui associe la partition en $(X_1, X_2, \ldots, X_k \cup X_{k+1})$.
    D'après l'hypothèse de récurrence, il y en a $\dfrac{n!}{x_1!\,x_2!\ldots(x_k+x_{k+1})!}$
  * Or, toujours d'après l'hypothèse de récurrenc, le nombre de façons de répartir les éléments de $X_k \cup X_{k+1}$ en X_k et X_{k+1} est $\dfrac{(x_k+x_{k+1})!}{x_k!\,x_{k+1}!}$
  * On obtient enfin le résultat cherché en multipliant les possibilités.

Coefficients multinomiaux

* Le nombre de partitions d'un ensemble E à n éléments en k ensembles non vides $(X_i)_{0\leq i\leq k}$ de cardinaux respectifs $(x_i)_{0\leq i\leq k}$ est noté.

$$C_n^{x1,\, x2, \dots,\, xk} = \frac{n\,!}{x_1\,!\, x_2\,! \dots x_k\,!}$$

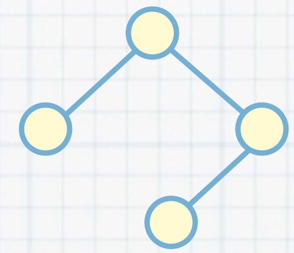
* Ce nombre est appelé **coefficient multinomial**. Il apparaît dans la formule du développement de $(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n$

Combinatoire bijective

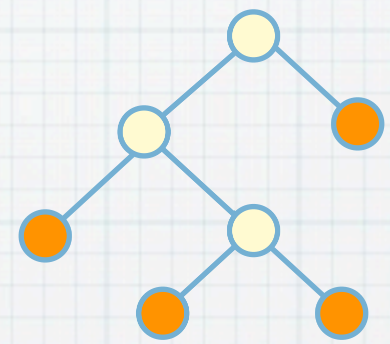
* Deux ensembles finis sont en bijection si et seulement si ils ont même nombre d'éléments
* Exemples
  * Parties à k éléments d'un ensemble à n éléments
  * Mots à n lettres sur l'alphabet {0,1} ayant k lettres égales à 1
  * Chemins du plan allant de (0,0) à (k, n-k)

Arbres et mots de parenthèses

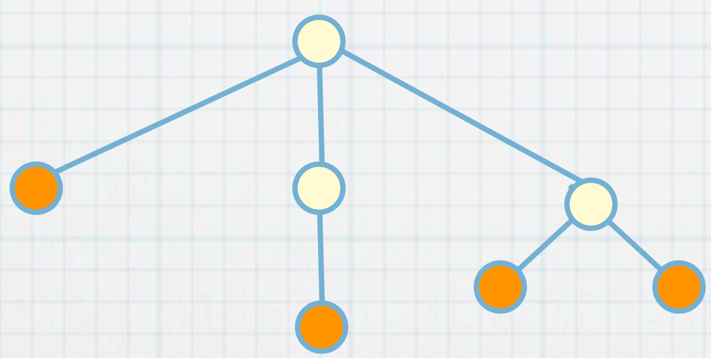
- Arbres binaires



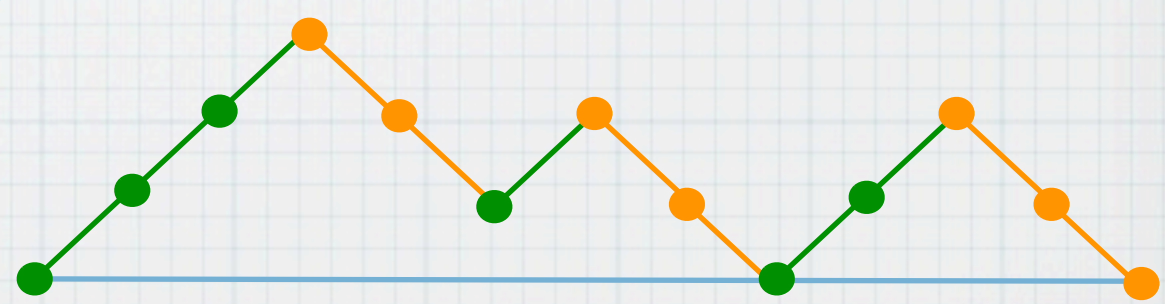
- Arbres binaires complets



- Arbres

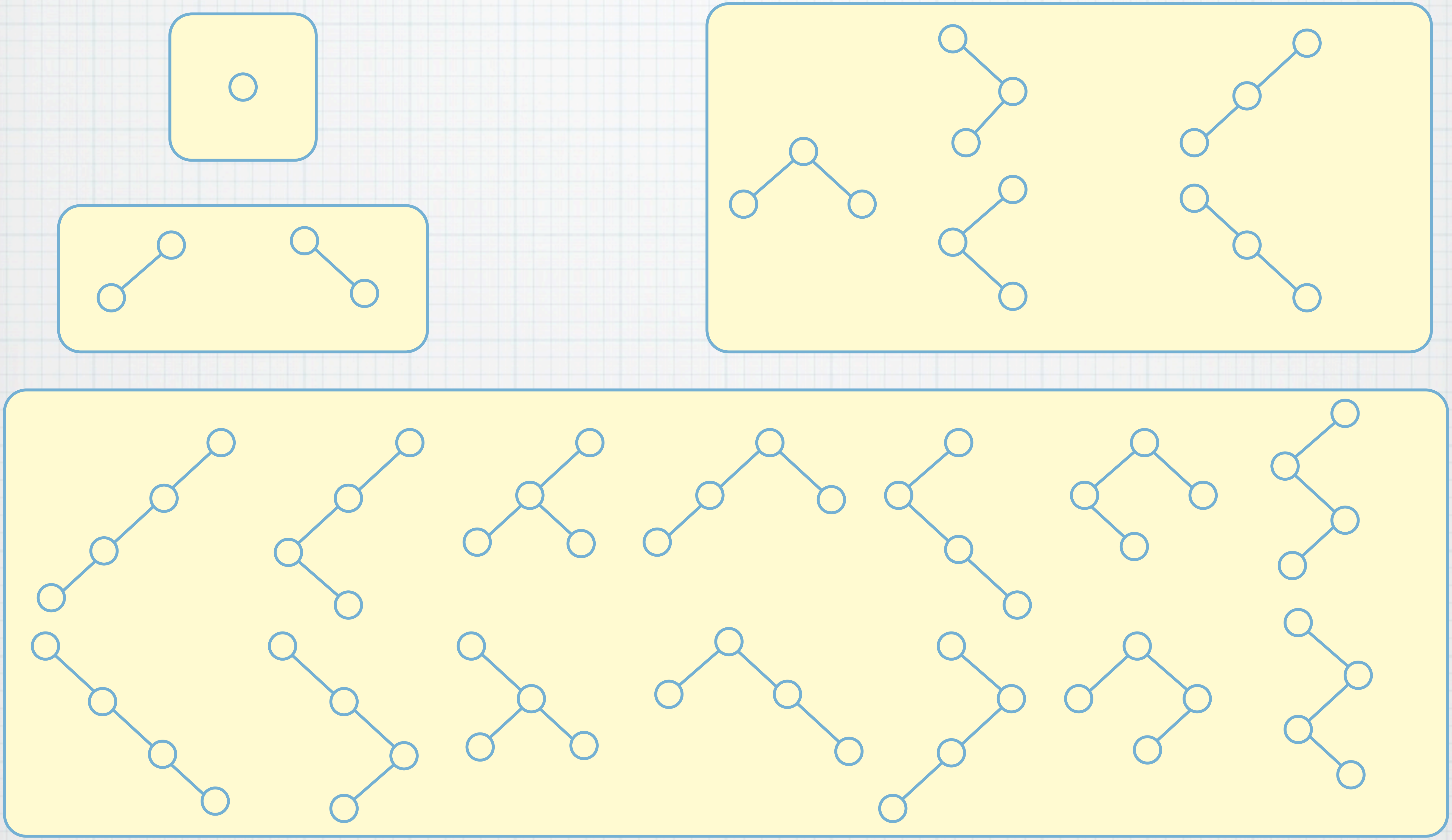


- Mots de parenthèse

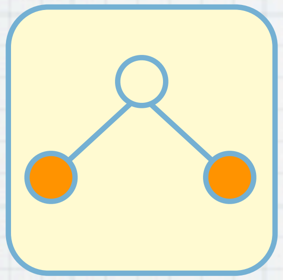


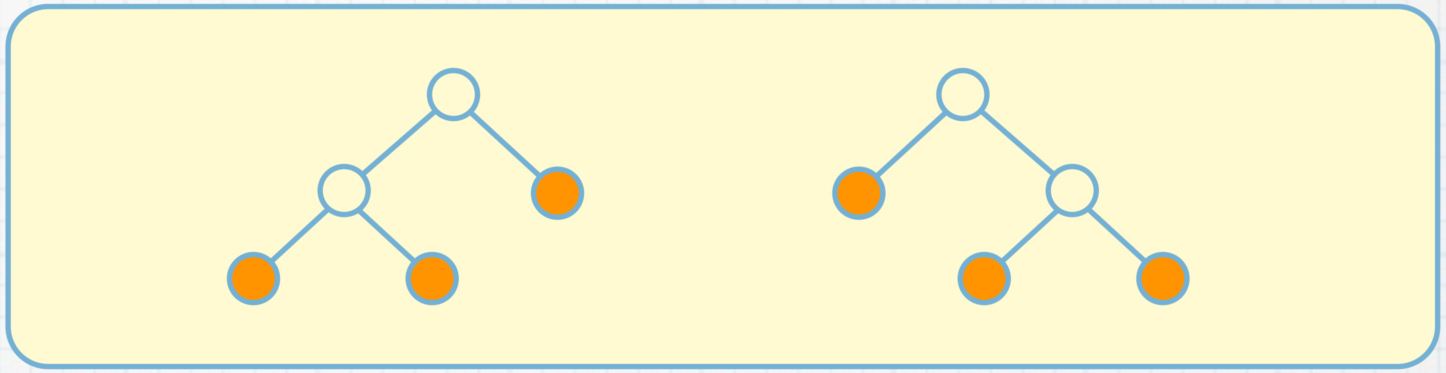
((())())(())

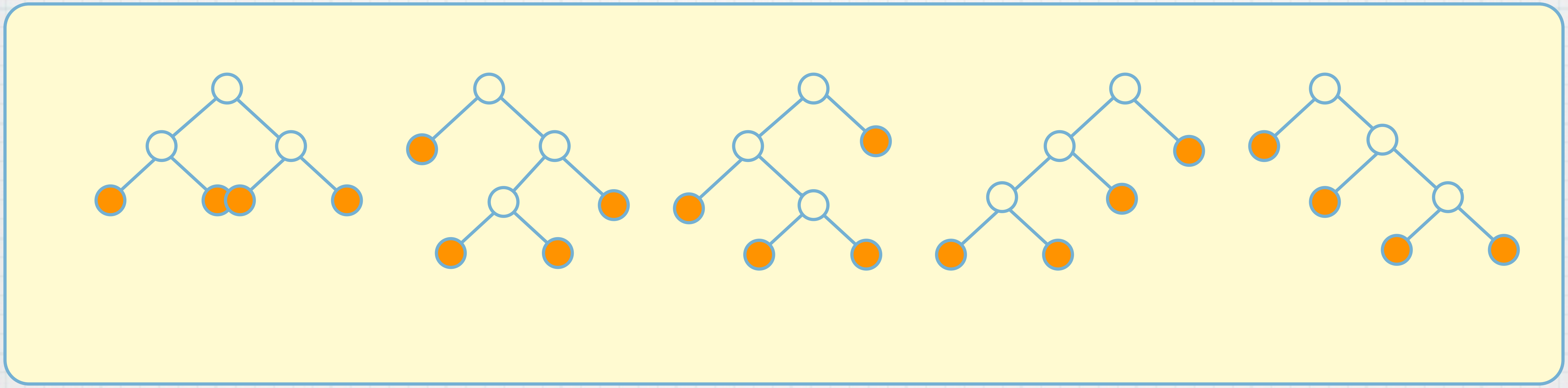
Arbres binaires



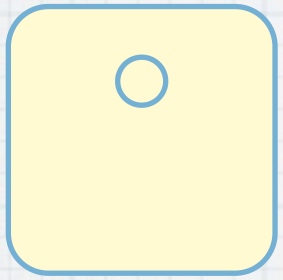
Arbres binaires complets

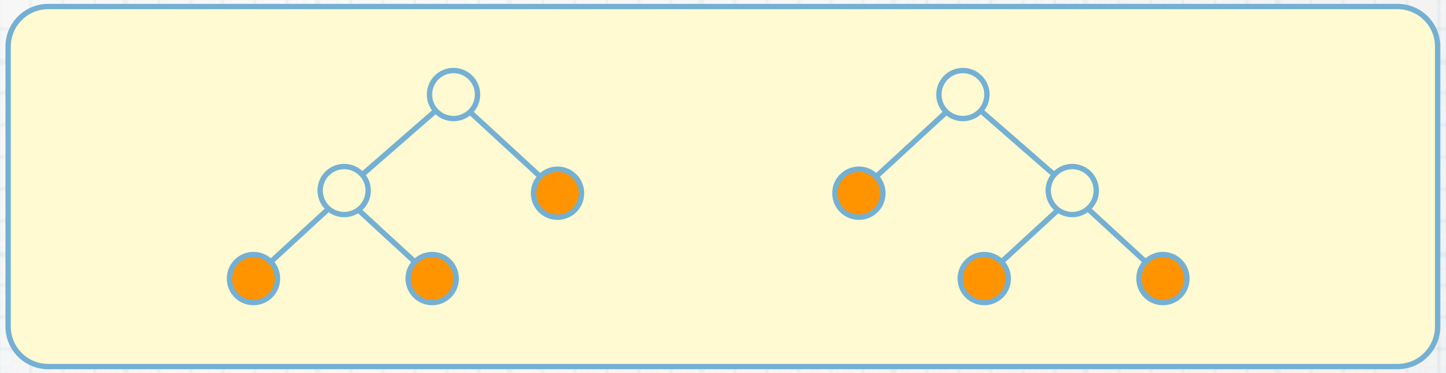


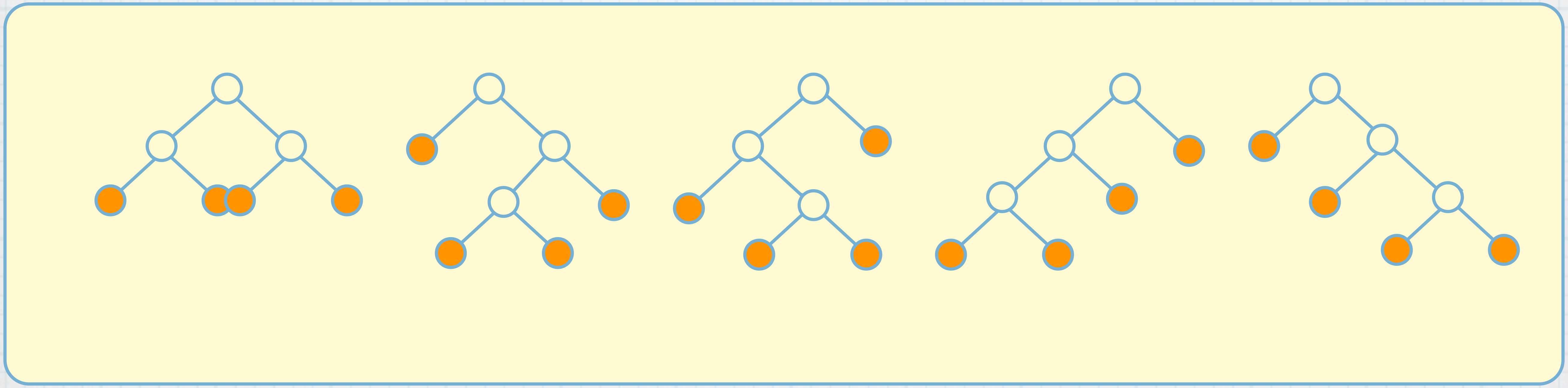




Arbres

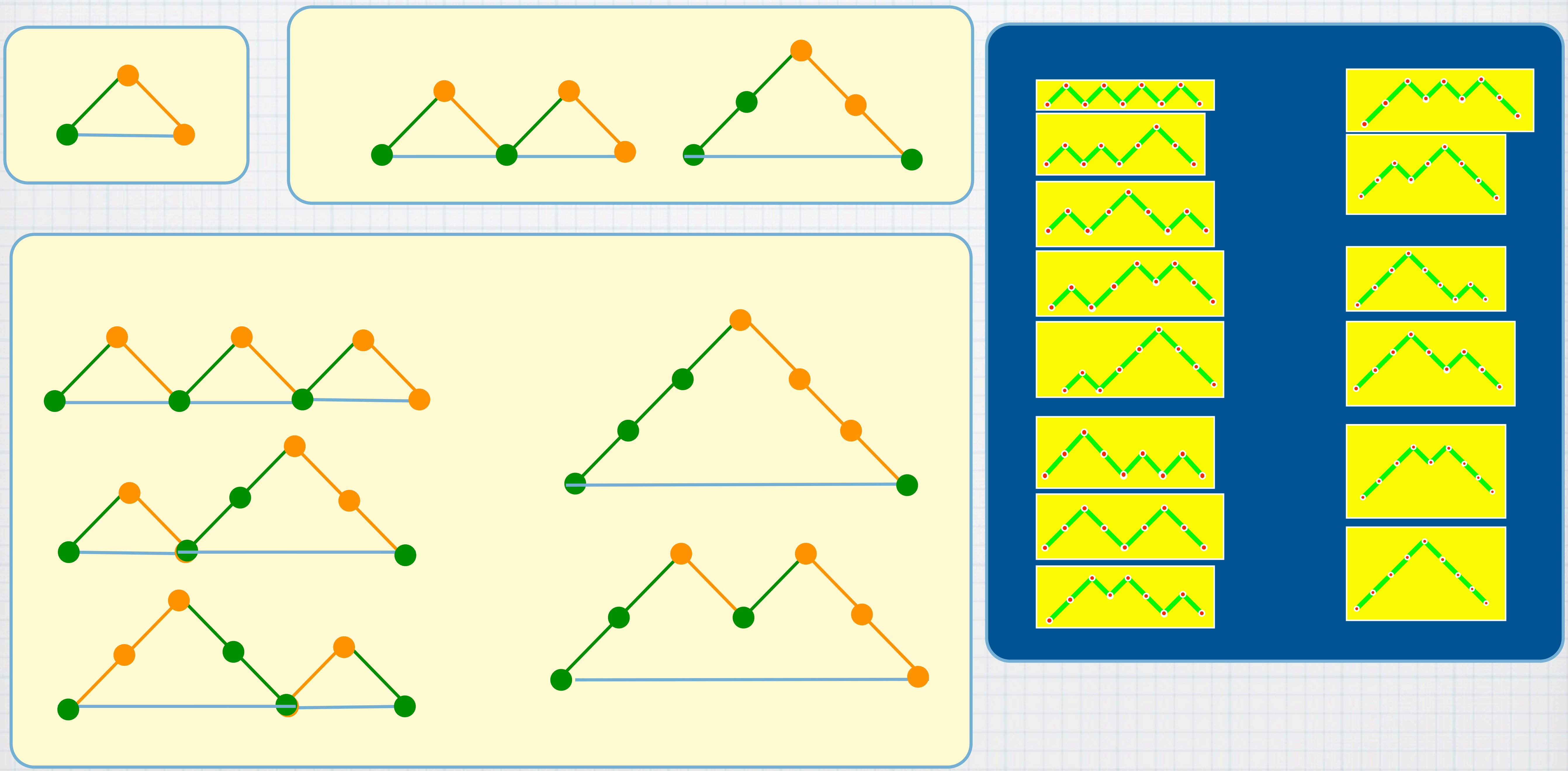




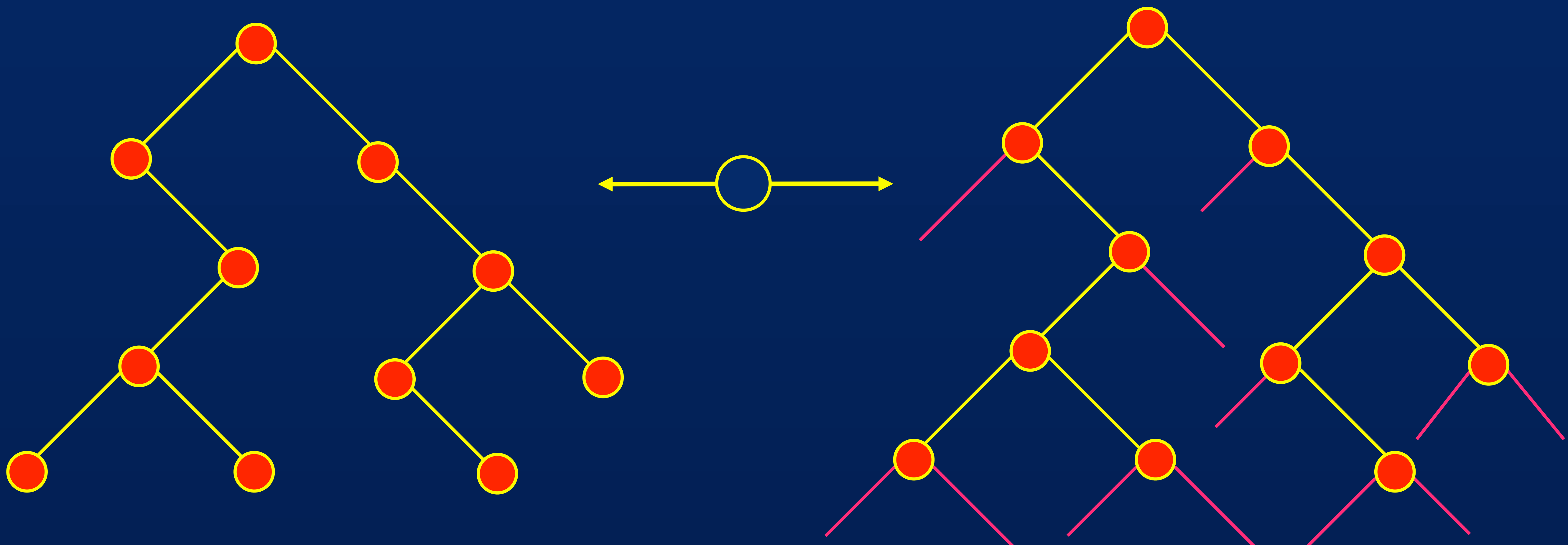


Arbres généraux

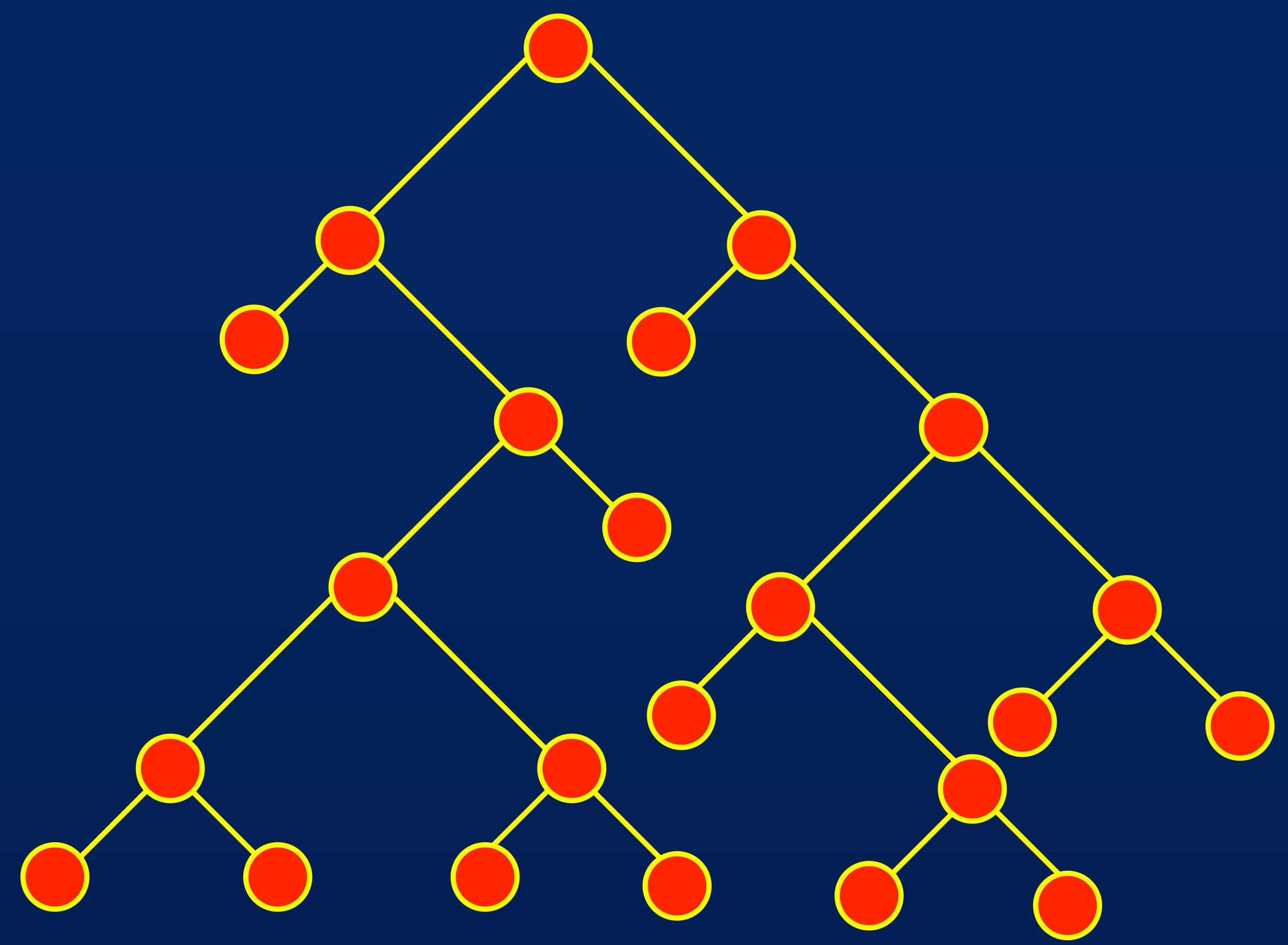
Mots de Dyck, ou mots de parenthèses



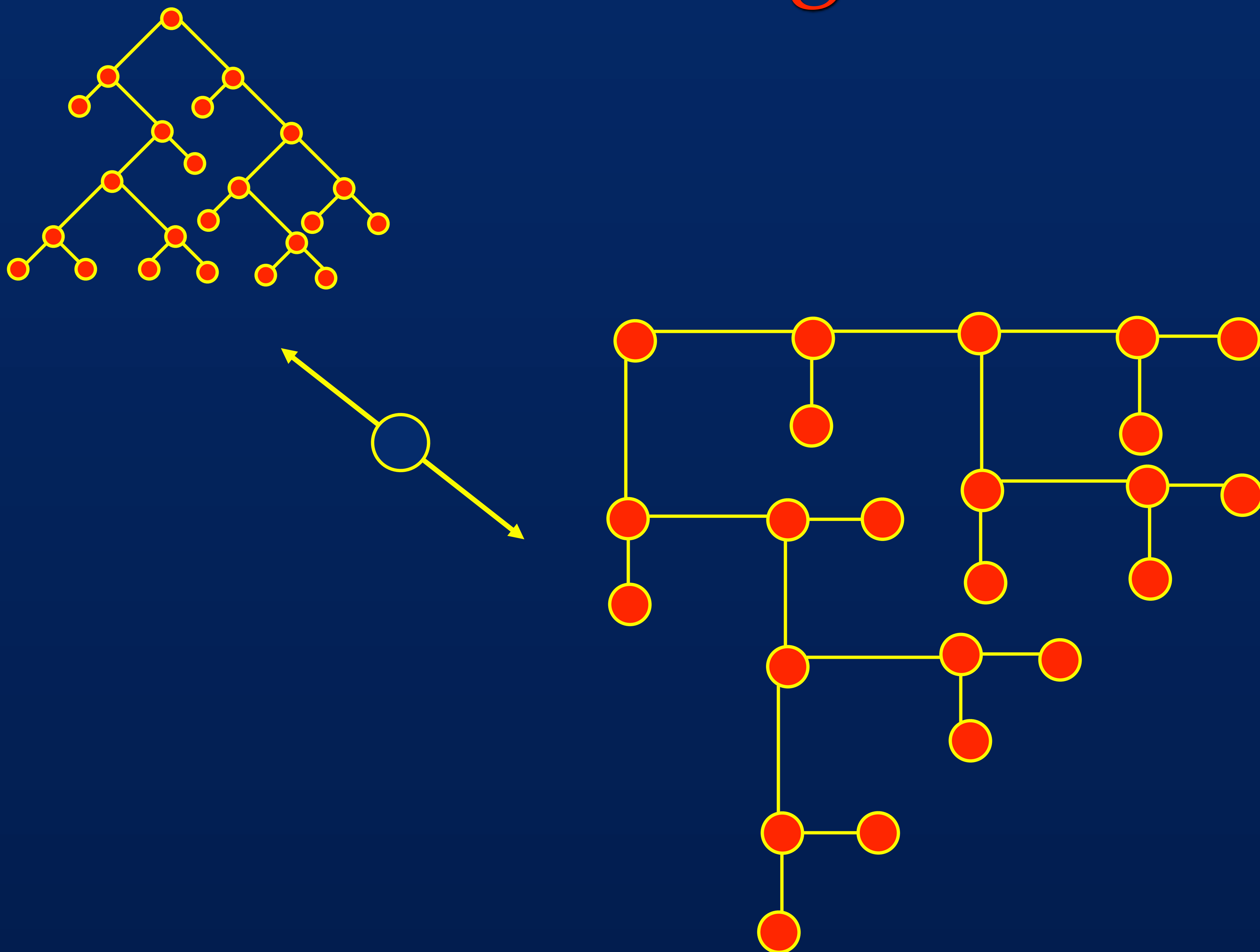
Arbres binaires et arbres binaires complets



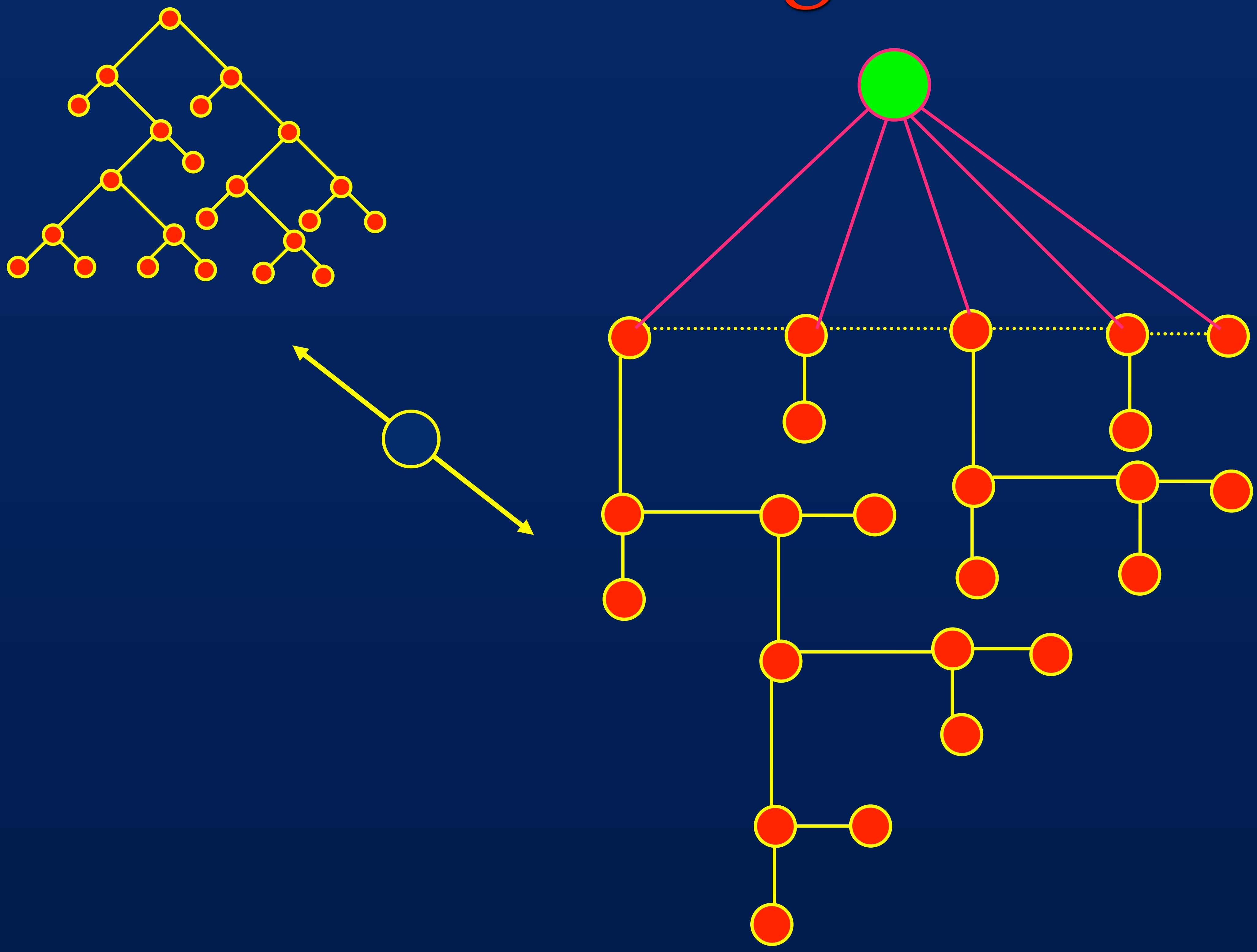
Arbres binaires complets et Arbres généraux



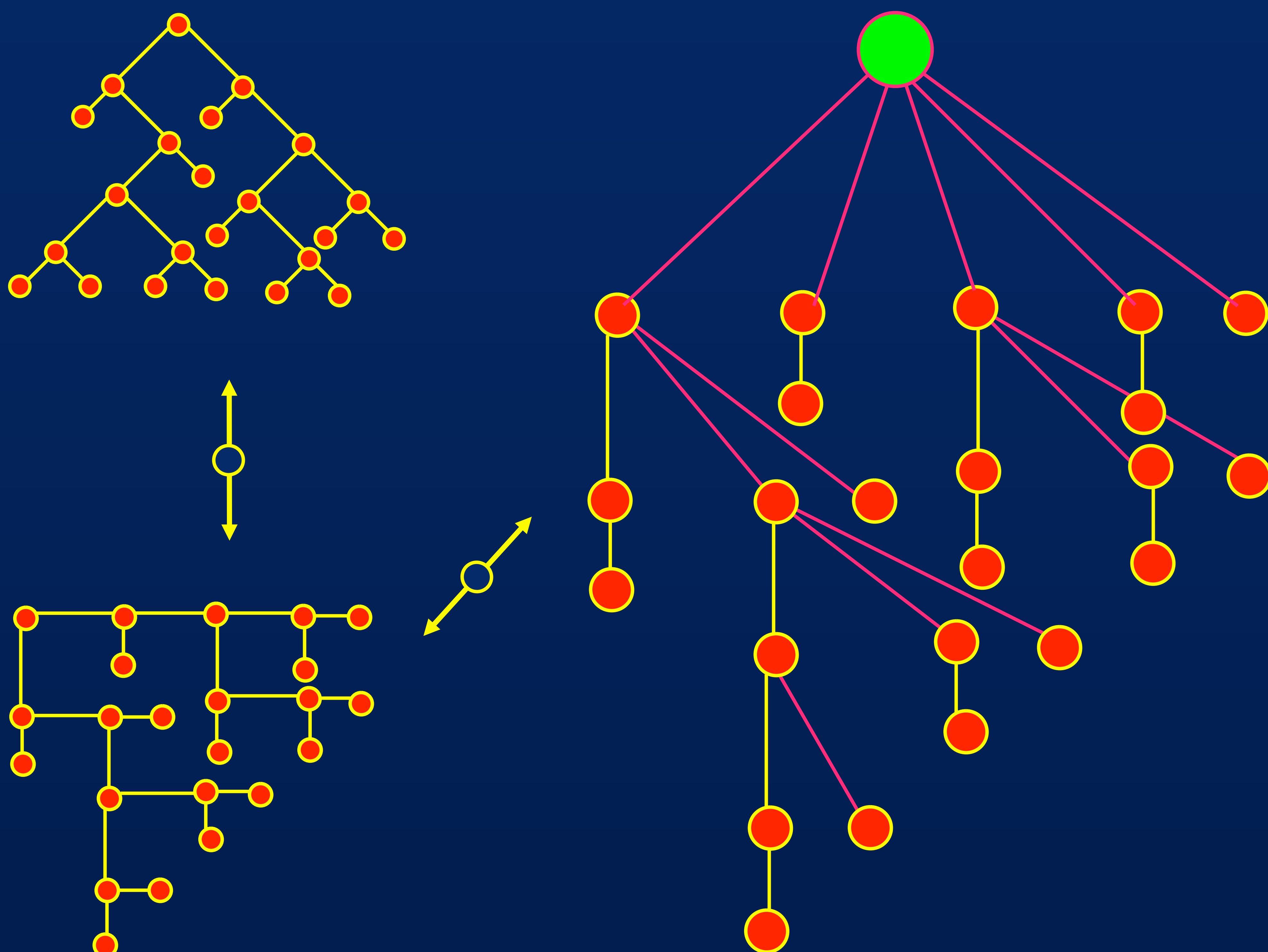
Arbres binaires complets et Arbres généraux



Arbres binaires complets et Arbres généraux



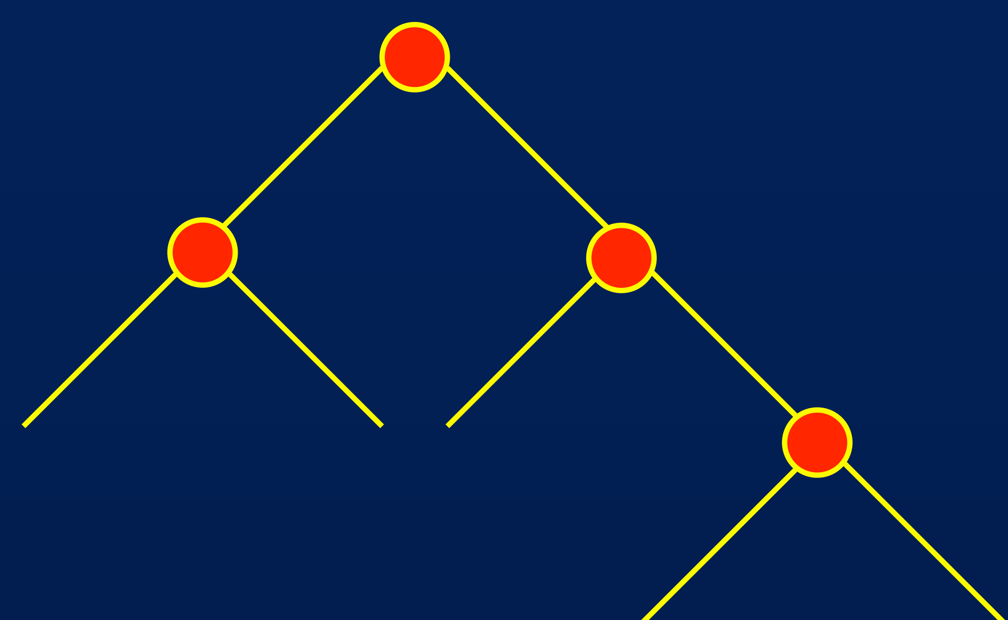
Arbres binaires complets et Arbres généraux



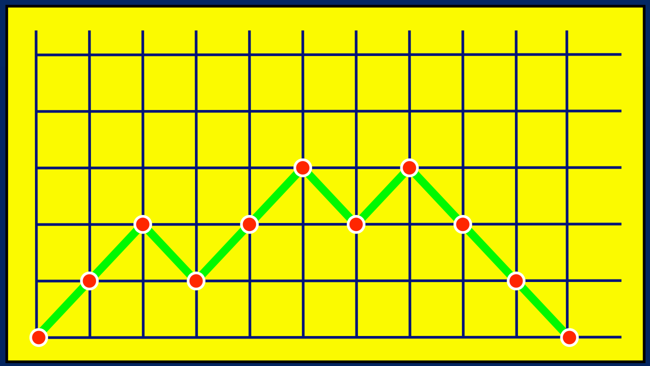
Mots de Dyck et Arbres binaires complets

$$x \quad x \quad \overline{x} \quad \overline{x} \quad x \quad \overline{x} \quad x \quad \overline{x}$$

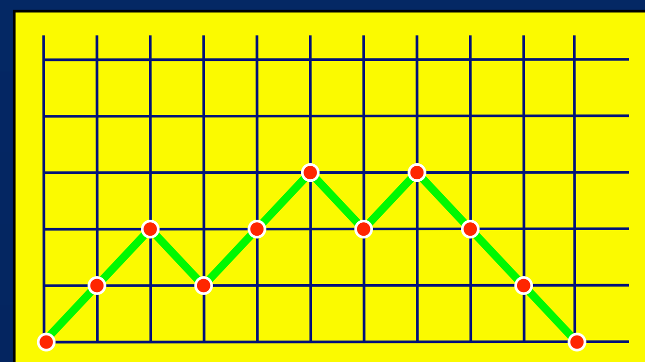
Parcours du promeneur

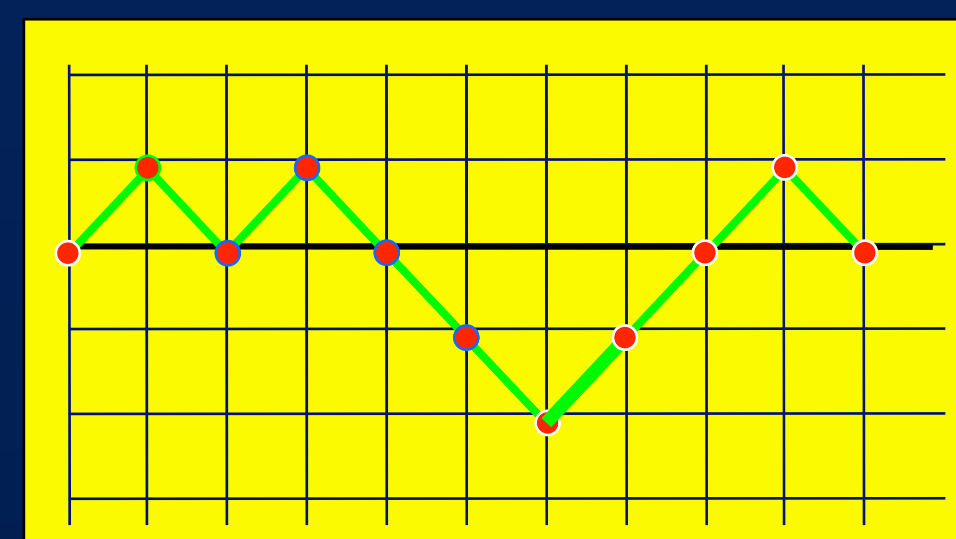


Nombres de Catalan

$(n+1)\#$  $= \binom{2\,n}{n}$

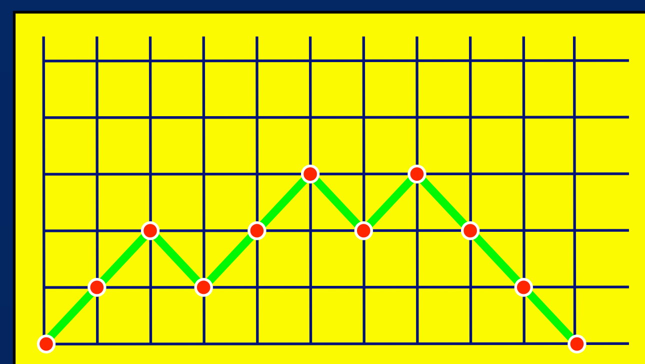
Nombres de Catalan

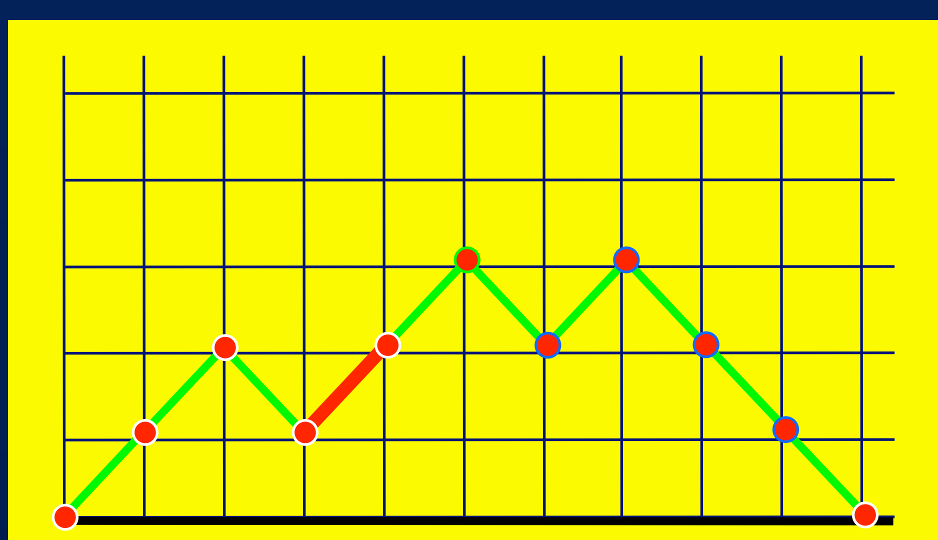
(n+1)#  $= \binom{2\,n}{n}$



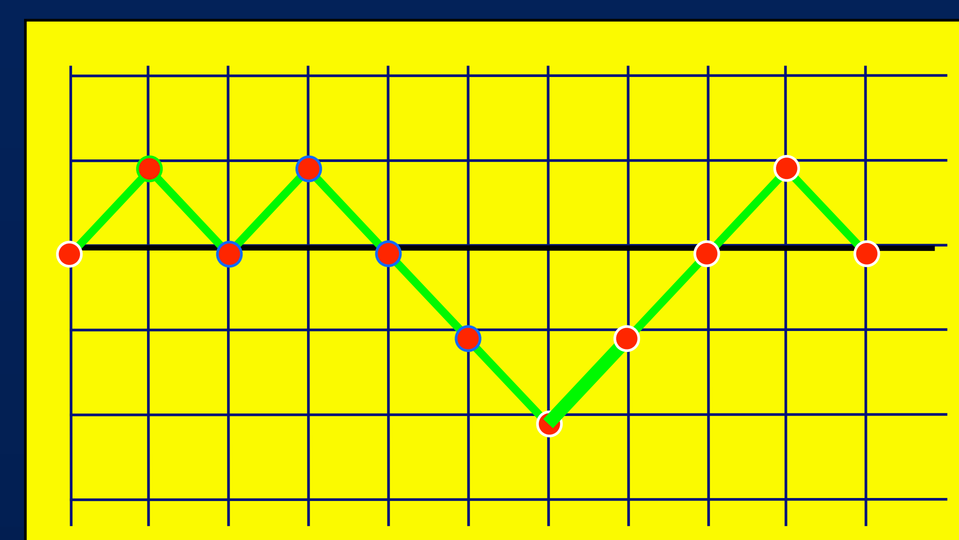
Grands Dycks

Nombres de Catalan

(n+1)#  $= \binom{2n}{n}$



Dyck Marqués



Grands Dycks

$$(n+1)\, C_n = \binom{2n}{n}$$