

TD n2

Ensembles et dénombrabilité

1 Echauffement

Exercice 1) Vocabulaire sur les ensembles

1. Donner les éléments de $E = \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\})$.
2. Donner les éléments de l'ensemble A des éléments de E dont la somme est inférieure ou égale à 3. Donner la fonction caractéristique de A dans E .
3. Donner les éléments de l'ensemble B des éléments de E qui ont un nombre pair d'éléments. Donner la fonction caractéristique de B dans E .
4. Donner les éléments de la réunion, l'intersection, la différence ainsi que la différence symétrique des ensembles A et B .

Exercice 2) Est-ce que $\{a\} \in \{a, b, c\}$, $\{a\} \subseteq \{a, b, c\}$? Quels sont les éléments de $\mathcal{P}(\{a\})$? Et ceux de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a\}))$?

Exercice 3) Fonctions caractéristiques. On considère l'ensemble E des chiffres de 0 à 9.

1. Soit A la partie de E dont la fonction caractéristique correspond à la suite 1001101101. Décrire l'ensemble A .
2. Quelle est la fonction caractéristique du complémentaire de A dans E ?
3. Quelle est la fonction caractéristique du sous-ensemble B de E constitué des chiffres pairs?
4. Vérifier que l'on a bien $\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B$
5. Vérifier que l'on a bien $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}$

Exercice 4) Montrer que l'ensemble des nombres entiers multiples de 3 est dénombrable.

2 Exercices d'entraînement

Exercice 5) Une enquête révèle que sur 100 étudiants interrogés, 52 suivent le cours de mathématiques, 52 suivent le cours d'informatique, 37 suivent le cours d'économie, 20 suivent les cours de mathématiques et d'informatique, 15 suivent les cours de mathématiques et d'économie, 10 suivent les cours d'informatique et d'économie, et enfin, 3 suivent les trois cours.

À l'aide de calculs ensemblistes, dites combien d'étudiants :

1. ne suivent aucun de ces trois cours.

2. ne suivent que le cours d'informatique.
3. suivent au moins deux des trois cours.
4. suivent exactement deux des trois cours.

Exercice 6) Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E . Montrez que $A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$ si et seulement si $A \cap B = A \cap C$. On pourra utiliser les fonctions caractéristiques.

Exercice 7) Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E . Montrez que si $A \cup B \subseteq A \cup C$ et si $A \cap B \subseteq A \cap C$, alors $B \subseteq C$.

Exercice 8) Dans un club de tennis, tous les membres jouent mais il y a ceux qui ne changent pas souvent de partenaires et ceux qui en changent sans arrêt. Démontrez l'aide du principe des tiroirs, et en considérant l'application "nombre de partenaires", qu'il y a au moins deux joueurs qui ont déjà joué contre le même nombre de partenaires.

Exercice 9) L'ensemble des applications de \mathbb{N} dans $B = \{0, 1\}$ est-il dénombrable ?
Et l'ensemble des applications de B dans \mathbb{N} ?

3 Pour aller plus loin

Exercice 10)

- **Le paradoxe du barbier.** Sur l'enseigne du barbier du village, on peut lire : "Je rase tous les hommes du village qui ne se rasent pas eux-mêmes, et seulement ceux-là". Qui rase le barbier ?
- Soit E un ensemble quelconque et $f : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$. Soit X la partie de E formée des éléments x de E tels que $x \notin f(x)$. Montrer qu'il n'existe pas d'élément y de E tel que $f(y) = X$. Quel est le lien avec le paradoxe du barbier ?

Exercice 11)

1. Montrer que parmi 11 entiers distincts choisis entre 1 et 20 il en existe au moins deux dont la différence est égale à 10.
2. * Etant donnés 101 entiers naturels distincts dont aucun ne dépasse la valeur 200, montrer qu'au moins l'un d'entre eux en divise un autre (bien sûr distinct du premier).

Exercice 12) Montrez que l'ensemble F des parties finies de \mathbb{N} est dénombrable.