Université de Nice – Sophia Antipolis — Licence 2
Outils Formels pour l'Informatique — 2012–2013

TD n2

Ensembles et dénombrabilité

1 Echauffement

Exercice 1) Vocabulaire sur les ensembles

1. Donner les éléments de $E = \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\})$.
2. Donner les éléments de l'ensemble A des éléments de E dont la somme est inférieure ou égale à 3. Donner la fonction caractéristique de A dans E.
3. Donner les éléments de l'ensemble B des éléments de E qui ont un nombre pair d'éléments. Donner la fonction caractéristique de B dans E.
4. Donner les éléments de la réunion, l'intersection, la différence ainsi que la différence symmétrique des ensembles A et B.

---

1. L'ensemble E contient 16 éléments, que l'on peut mettre en bijection avec les 16 mots de longueur 4 sur l'alphabet $\{0, 1\}$. Il faut évidemment détailler ces 16 ensembles.

2. $A = \{\emptyset,\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{1, 2\}\}$ dont les images par la fonction caractéristique sont respectivement 0000,1000, 0100,0010,1100. Mais la fonction caractéristique de A dans E est 1111010000000000

3. $B = \{\emptyset,\ \{1, 2\},\ \{1, 3\},\ \{1, 4\},\ \{2, 3\},\ \{2, 4\},\ \{3, 4\},\ \{1, 2, 3, 4\}\}$ dont les images par la fonction caractéristique sont respectivement 0000, 1100,1010,1001, 0110,0101,0011,1111. On remarque que B est en bijection avec l'ensemble des mots de longueur 4 sur l'alphabet $\{0, 1\}$ qui ont un nombre pair de 1. La fonction caractéristique de A dans E est 1010101010101010

4. $A \cap B = \{\emptyset,\ \{1, 2\}\}$;
$A \cup B = \{\emptyset,\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{1, 2\},\ \{1, 3\},\ \{1, 4\},\ \{2, 3\},\ \{2, 4\},\ \{3, 4\},\ \{1, 2, 3, 4\}\}$;
$A \setminus B = \{\{1\},\ \{2\},\ \{3\}\}$;
$A\Delta B = (A\cup B)\setminus(A\cap B) = (A\setminus B)\cup(B\setminus A) = \{\{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{1, 3\},\ \{1, 4\},\ \{2, 3\},\ \{2, 4\},\ \{3, 4\},\ \{1, 2, 3, 4\}\}$.

Exercice 2) Est-ce que $\{a\} \in \{a, b, c\}$, $\{a\} \subseteq \{a, b, c\}$? Quels sont les éléments de $\mathcal{P}(\{a\})$? Et ceux de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a\}))$?

On a évidemment $\{a\} \subseteq \{a, b, c\}$. $\mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset,\ \{a\}\}$. Pour la dernière question, rappelez vous que $\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset,\ \{1\},\ \{2\},\ \{1, 2\}\}$ et remplacez 1 par $\emptyset$ et 2 par $\{a\}$. On a donc $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a\})) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{a\}\}, \{\emptyset,\ \{a\}\}\}$.

Exercice 3) Fonctions caractéristiques. On considère l'ensemble E des chiffres de 0 à 9.

1. Soit A la partie de E dont la fonction caractéristique correspond à la suite 1001101101. Décrire l'ensemble A.
2. Quelle est la fonction caractéristique du complémentaire de A dans E?
3. Quelle est la fonction caractéristique du sous-ensemble B de E constitué des chiffres pairs ?

4. Vérifier que l'on a bien $\chi_{A\cap B} = \chi_A \chi_B$

5. Vérifier que l'on a bien $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B$

---

1. $A = \{0, 3, 4, 6, 7, 9\}$.
2. χ_{A^c} correspond à la suite 0110010010.
3. χ_B correspond à 1010101010.
4. $A \cap B = \{0, 4, 6\}$ donc $\chi_{A\cap B}$ correspond à 1000101000. $\chi_A \chi_B = 1001101101 \cdot 1010101010$.
5. $\chi_{A\cup B}$ correspond à 1011101111 qui est égal à $1001101101 + 1010101010 - 1000101000$.

Exercice 4) Montrer que l'ensemble des nombres entiers multiples de 3 est dénombrable.

L'application qui a tout entier n lui associe $3n$ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $3\mathbb{N}$, ce qui prouve que $3\mathbb{N}$ est dénombrable.

---

2 Exercices d'entrainement

Exercice 5) Une enquête révèle que sur 100 étudiants interrogés, 52 suivent le cours de mathématiques, 52 suivent le cours d'informatique, 37 suivent le cours d'économie, 20 suivent les cours de mathématiques et d'informatique, 15 suivent les cours de mathématiques et d'économie, 10 suivent les cours d'informatique et d'économie, et enfin, 3 suivent les trois cours.

À l'aide de calculs ensemblistes, dites combien d'étudiants :

1. ne suivent aucun de ces trois cours.
2. ne suivent que le cours d'informatique.
3. suivent au moins deux des trois cours.
4. suivent exactement deux des trois cours.

On note par M, I, E resp. les ensembles des étudiants qui suivent les cours de math, info et économie. On sait que $|M| = 52$, $|I| = 52$, $|E| = 37$, $|M \cap I| = 20$, $|M \cap E| = 15$, $|I \cap E| = 10$, $|M \cap I \cap E| = 3$.

On a que $|M \cup I \cup E| = |M| + |I| + |E| - |M \cap I| - |M \cap E| - |I \cap E| + |M \cap I \cap E| = 52 + 52 + 37 - 20 - 15 - 10 + 3 = 99$, donc 1 étudiant ne suit aucun des trois cours.

Les étudiants qui ne suivent que le cours d'informatique sont $|I \setminus (M \cup E)| = |I| - |I \cap M| - |I \cap E| + |I \cap M \cap E| = 52 - 20 - 10 + 3 = 25$.

Analoguement, les étudiants qui ne suivent que le cours de math sont $|M| - |M \cap I| - |M \cap E| + |I \cap M \cap E| = 52 - 20 - 15 + 3 = 20$, et les étudiants qui ne suivent que le cours d'économie sont $|E| - |E \cap M| - |E \cap I| + |I \cap M \cap E| = 37 - 15 - 10 + 3 = 15$. Donc les étudiants qui suivent au plus un cours sont $25 + 20 + 15 + 1 = 61$ et donc les étudiants qui suivent au moins deux des trois cours sont $100 - 61 = 39$.

Les étudiants qui suivent exactement deux des trois cours sont $(|M \cap I| - |I \cap M \cap E|) + (|I \cap E| - |I \cap M \cap E|) + (|I \cap E| - |I \cap M \cap E|) = 17 + 12 + 7 = 36$.

Exercice 6) Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. Montrez que $A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$ si et seulement si $A \cap B = A \cap C$. *On pourra utiliser les fonctions caractéristiques.*

La première égalité se traduit sur les fonctions caractéristiques par l'égalité $\chi_A(1-\chi_B) = \chi_A(1-\chi_C)$ qui se réécrit $\chi_A\chi_B = \chi_A\chi_C$ d'où l'équivalence.

Exercice 7) Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. Montrez que si $A \cup B \subseteq A \cup C$ et si $A \cap B \subseteq A \cap C$, alors $B \subseteq C$.

Ici, on utilise le fait que $E \subseteq F$ si et seulement si $\chi_E \leq \chi_F$. Donc $\chi_{A\cup B} \leq \chi_{A\cup C}$ équivaut à $\chi_A + \chi_B - \chi_A\chi_B \leq \chi_A + \chi_C - \chi_A\chi_C$. Couplé avec l'inégalité $\chi_A\chi_B \leq \chi_A\chi_C$ on en déduit aisément, en sommant les inégalités, que $\chi_B \leq \chi_C$ d'où le résultat.

Exercice 8) Dans un club de tennis, tous les membres jouent mais il y a ceux qui ne changent pas souvent de partenaires et ceux qui en changent sans arrêt. Démontrez l'aide du principe des tiroirs, et en considérant l'application "nombre de partenaires", qu'il y a au moins deux joueurs qui ont déjà joué contre le même nombre de partenaires.

On associe à chacun des n joueurs le nombre de partenaires avec qui il a joué. On obtient alors n nombres dont la propriété est d'être compris entre 1 (tous les membres jouent) et $n-1$. D'après le principe des tiroirs, deux de ces nombres sont forcément égaux et donc il existe au moins deux joueurs qui ont le même nombre de partenaires.

Exercice 9) L'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans $B = \{0, 1\}$ est-il dénombrable ?
Et l'ensemble des applications de B dans $\mathbb{N}$?

L'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans $B = \{0, 1\}$ correspond à l'ensemble des suites infinies de 0 et de 1. On peut voir une suite infinie comme un codage par la fonction caractéristique, d'une partie de $\mathbb{N}$. Ainsi la suite $01010101010\ldots$ code les nombres impairs. On en déduit alors que l'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans $B = \{0, 1\}$ n'est pas dénombrable.

On peut aussi redémontrer ce résultat en appliquant la méthode de Cantor.

Les applications de B dans $\mathbb{N}$ correspondent quant-à-elles aux couples d'entiers, et donc à $\mathbb{N}^2$ qui est dénombrable (rappelez vous de l'étiquetage diagonal de $\mathbb{N}^2$).

---

3 Pour aller plus loin

Exercice 10)

- **Le paradoxe du barbier.** Sur l'enseigne du barbier du village, on peut lire : "Je rase tous les hommes du village qui ne se rasent pas eux-mêmes, et seulement ceux-là". Qui rase le barbier ?
- Soit E un ensemble quelconque et $f : E \to \mathcal{P}(E)$. Soit X la partie de E formée des éléments x de E tels que $x \notin f(x)$. Montrer qu'il n'existe pas d'élément y de E tel que $f(y) = X$. Quel est le lien avec le paradoxe du barbier ?

Le barbier ne peut appartenir qu'à un des sous ensembles **disjoints**, R constitué de ceux qui se rasent eux mêmes ou B ceux qui se font raser par le barbier. S'il appartient au premier sous ensemble il appartiendrait aussi au second, et l'intersection des deux sous-ensembles ne serait pas vide. De même s'il appartenait au second, il appartiendrait aussi au premier, d'où la contradiction.

Supposons qu'avec les hypothèses données il existe un élément y tel que $f(y) = X$. Alors deux possibilités pour y

- Si $y \in X$ alors par définition de l'ensemble X, on aurait que $y \notin f(y) = X$ d'où la contradiction.
- De même, Si $y \notin X$, alors $y \in f(y) = X$ d'où la contradiction.

Il s'agit en fait du même problème puisque si f désigne la fonction définie par $f(x)$ est l'ensemble de tous les y qui sont rasés par x. Alors l'ensemble X est exactement l'ensemble B constitué des habitants ne se rasant pas eux mêmes. On pourrait penser qu'en notant b le barbier on a $B = X = f(b)$ mais on vient de démontrer que ce n'était pas possible ....

Exercice 11)

1. Montrer que parmi 11 entiers distincts choisis entre 1 et 20 il en existe au moins deux dont la différence est égale à 10.
2. $*$ Etant donnés 101 entiers naturels distincts dont aucun ne dépasse la valeur 200, montrer qu'au moins l'un d'entre eux en divise un autre (bien sûr distinct du premier).

---

1. Soient donc $x_1, x_2, \ldots, x_{11}$ les 11 entiers distincts choisis entre 1 et 20 net notons $y_1, y_2, \ldots, y_{11}$ les restes des divisions de ces nombres par 10. Ce sont 11 nombres compris entre 0 et 9 et donc, d'après le lemme des tiroirs, deux d'entre eux sont égaux, ce qui signifie qu'il existe deux entiers distincts i et j pour lesquels x_i et x_j ont même reste en les divisant par 10. Mais comme les x_i sont supposés distincts et compris entre 1 et 20, l'unique possibilité est que leur différence est exactement égale à 10.
2. Il faut considérer, pour chacun des 100 entiers impairs de la forme $2k+1$ entre 1 et 200 (k pouvant varier de 0 à 99), l'ensemble S_k des$(2k+1)\cdot 2^i$ qui sont inférieurs ou égaux à 200. Par exemple $S_{12} = \{25,\ 50,\ 200\}$, $S_5 = \{11,\ 22,\ 44,\ 88,\ 176\}$. Clairement, si l'on prend 101 nombres entre 1 et 200 alors forcément deux d'entre eux sont dans le même de ces ensembles, et donc s'écrivent $(2k+1)\cdot 2^i$ et $(2k+1)\cdot 2^j$, et par conséquent, l'un est multiple de l'autre.

Exercice 12) Montrez que l'ensemble F des parties finies de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

A toute partie finie non vide A de $\mathbb{N}$, on lui associe la suite binaire $x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ définie par $x_k = 1$ si l'entier k appartient à A et 0 sinon, avec la contrainte que $x_n = 1$ (autrement dit n est le plus grand élément de A). Le nombre entier strictement positif codé en binaire par $x_n,\ x_{n-1},\ x_{n-2},\ \ldots,\ x_2,\ x_1,\ x_0$ caractérise entièrement l'ensemble A. Il suffit ensuite de coder l'ensemble vide par 0 et l'on vient de décrire une bijection de F dans $\mathbb{N}$, ce qui prouve que F est dénombrable. Par exemple la partie $\{2, 3, 5, 8\}$ est associée tout d'abord au mot binaire 001101001, puis à l'entier binaire 100101100 qui représente l'entier $256 + 32 + 8 + 4 = 300$. Réciproquement l'entier $25 = 1 + 8 + 16$, soit 1101 en binaire, code l'ensemble $\{0, 2, 3\}$.
