Université de Nice – Sophia Antipolis | Licence Informatique 2
Outils Formels pour l'Informatique | 2014–2015

TD n4

Récurrence et Induction

1 Echauffement

Exercice 1) Définir par induction l'ensemble des nombres entiers (non négatifs) multiples de 3

Exercice 2) Montrer que quelque soit $n \geq 0$, $n < 2^n$

Exercice 3) Montrer que pour tout $n \geq 4$, $2^n < n!$

Exercice 4) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $n^3 + 2n$ est divisible par 3.

Exercice 5) Etudier sur le cours la démonstration de la propriété *Deux mots commutent si et seulement si ils sont puissance d'un même mot*

Exercice 6) Donner une définition inductive de l'ensemble des nombres entiers pairs

Exercice 7) Caractériser le sous ensemble de $\mathbb{N}$ défini inductivement par

- $\mathcal{B} = \{1\}$
- L'opération unaire $f \ : \ x \longmapsto 2x$

Que se passe-t-il si l'on prend pour base $\mathcal{B} = \{0\}$?

2 Exercices d'entrainement

Exercice 8) Montrer par récurrence que le nombre $|\mathcal{P}(E)|$ de parties d'un ensemble E à n éléments est 2^n.

Exercice 9) Montrer que $\Sigma_{j=1}^{n}(j \cdot j!) = (n+1)! - 1$

Exercice 10) Pour n entier non nul, soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété "dans un groupe de n chevaux, tous ont la même couleur". Qu'y-a-t-il de faux dans la démonstration suivante :

- Pour $n = 1$, il n'y a qu'un cheval, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- Si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors soient $n + 1$ chevaux et prenons les n premiers chevaux. Par hypothèse de récurrence, ils ont la même couleur, et il en est de même pour les n derniers. Comme il y a des chevaux qui sont à la fois dans les n premiers et dans les n derniers, ils ont tous la même couleur. Donc $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.
- Donc pour tout n, $\mathcal{P}(n)$ est vraie : tous les chevaux ont la même couleur !

Exercice 11) Montrer que le programme suivant calcule bien le $PGCD$ de deux nombres a et b. Pour cela, on établira une récurrence généralisée sur la somme $a + b$.

```
Fonction Euclide (a,b: entier): entier
début
    si b>a alors Euclide(b,a)
    si b=0 alors Euclide := a
    sinon Euclide := Euclide(a-b, b)
fin
```

Exercice 12) L'ensemble AB des arbres binaires est défini inductivement par :

- $\emptyset \in AB$
- si $g \in AB$ et si $d \in AB$ alors $x = (., g, d) \in AB$.

Soient h, n et f les fonctions donnant respectivement la hauteur (ici le nombre de niveaux), le nombre de nœuds et le nombre de feuilles d'un arbre binaire.

1. Définir inductivement chacune des fonctions h, n et f ;
2. Montrer que pour tout arbre binaire $x \in AB$, $n(x) \leq 2^{h(x)} - 1$ et $f(x) \leq 2^{h(x)-1}$.

3 Pour aller plus loin

Exercice 13) Démontrer que dans tout ensemble fini non vide, il y a autant de parties ayant un nombre pair d'éléments que de parties dont le nombre d'éléments est impair.

Exercice 14) Montrer que $\mathbb{N} - \{0\}$ peut être défini inductivement par

- $\mathcal{B}$ est l'ensemble des nombres entiers impairs
- L'opération unaire $f \; : \; x \longmapsto 2x$

Exercice 15) Soit M le sous-ensemble de $\mathbb{N}$ défini inductivement par

- $\mathcal{B} = \{-1, 0, 1\}$
- L'opération binaire $f \; : \; (x, y) \longmapsto 2x + 3y$

1. Montrer que 2 et 3 sont dans M.
2. Montrer que $4, 5$ et 6 sont dans M
3. Montrer que tout entier $n > 1$ peut s'écrire $n = 2\alpha + 3\beta$ avec $0 \leq \alpha < n$ et $0 \leq \beta < n$. En déduire que M contient $\mathbb{N}$
4. Montrer que si n est dans M, il en est de même pour $-n$. En déduire que $M = \mathbb{Z}$
5. Que se passe-t-il si l'on remplace $\mathcal{B}$ par $\{-1, 1\}$ dans la définition ?
6. Que se passe-t-il si l'on remplace f par $f \; : \; (x, y) \longmapsto 2x + 6y$ dans la définition ?

Exercice 16) Soit E l'ensemble des mots sur l'alphabet $A = \{a, b\}$ contenant autant de a que de b : $E = \{w \in A^\star \mid |w|_a = |w|_b\}$. Montrer que l'ensemble F engendré par le schéma inductif suivant est égal à E :

base : $\varepsilon \in F$;

règle : si $uv \in F$ alors $uabv \in F$ et $ubav \in F$.