Université de Nice – Sophia Antipolis
Outils Formels pour l'Informatique Théorique

Licence Math-Info 2
2011–2012

TD n°5

Dénombrement

1 Echauffement

Exercice 1) Dans une course opposant 15 chevaux, combien a-t-on de tiercés dans l'ordre possibles ? De tiercés dans le désordre possible ? Même questions pour les quartés et les quintets.

Exercice 2) Soient les deux permutations $\alpha = (2, 3, 4, 5, 7, 1, 6)$ et $\beta = (1, 3, 5, 6, 7, 4, 2)$, calculer leurs inverses, les compostions $\alpha \circ \beta$ et $\beta \circ \alpha$, les décompositions en cycles disjoints.

Exercice 3) Pour chacun des types d'arbres décrits en cours, dessiner tous les arbres ayant 1, 2, 3, 4 ... noeuds sans en oublier, ni dessiner deux fois le même.

Exercice 4) Parmi les permutations de 6 lettres a,b,c,d,e et f. Combien y en a-t-il qui n'admettent ni bde ni af comme facteur ? Combien y en a-t-il où les lettres sont dans l'ordre alphabétique ?

Exercice 5) On considère l'ensemble E des mots binaires sur l'alphabet $\{0, 1\}$.

1. Quel est le nombre de mots de E ayant n lettres comportant p occurrences de 0 et q occurrences de 1. On supposera bien sûr que $p + q = n$.
2. Combien y a-t-il de mots binaires commençant par 1 et de longueur inférieure ou égale à n ?
3. Combien y a-t-il de mots binaires commençant par 1, de longueur inférieure ou égale à n et ayant autant de lettres 1 que de lettres 0 ?

2 Exercices d'entrainement

Exercice 6) Si $k \leq n$, combien y-a-t il de permutations de n éléments qui laissent invariant au moins k éléments ? Et exactement k éléments ?

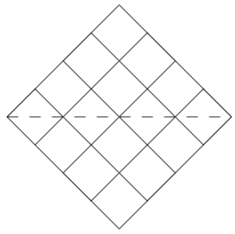
Exercice 7) Soit A et B deux ensembles finis comportant respectivement a et b éléments.
Combien y a-t-il de relations de A vers B, de fonctions de A vers B, d'applications de A vers B, d'applications injectives, d'applications bijectives ?

Exercice 8) Parmi les ensembles de cinq cartes extraites d'un jeu de 52 cartes, combien :

1. contiennent un carré (4 cartes de force égale) ?
2. contiennent un brelan (3 cartes de force égale), mais pas un carré ?
3. contiennent au moins une paire (2 cartes de force égale) ?
4. contiennent un full (3 et 2 cartes de forces égales) ?

Exercice 9) Combien peut-on écrire de nombres entiers de telle manière que chaque chiffre de sa représentation en base 10 ne soit pas répété ? Même question si l'on se restreint aux nombres inférieurs à 30 000.

Exercice 10) On considére un réseau informatique structuré en grille comme représenté ci-dessous. Les paquets doivent aller de P à Q, uniquement de gauche à droite. Combien d'itinéraires différents peuvent-ils suivre sachant que le grillage est un carré de n mailles de côté ? Enfin combien d'itinéraires différents peuvent-ils suivre si on les empéche de descendre au-dessous de la ligne pointillée ?



Exercice 11) Pour se rendre en déplacement les 11 joueurs d'une équipe de football et leur entraineur utilisent 3 voitures identiques ayant chacune 4 places. De combien de façons ces 12 personnes peuvent-elles se répartir si toutes ont le permis de conduire ? Même question si 5 ne l'ont pas.

Exercice 12) Quelle est la valeur de la variable "compteur" à la sortie du programme suivant ?

```
compteur ← 0
pour i de 1 à n faire
    pour j de i à n faire
        pour k de j à n faire
            compteur ← compteur + 1
```

3 Pour aller plus loin

Exercice 13) On rappelle que pour tout entier n, on a $\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$. En dérivant cette égalité par rapport à x en déduire une expression de $A(n) = \sum_{i=0}^{n} i2^i$, de $B(n) = \sum_{i=0}^{n} i^2 2^i$. Même exercice pour $C(n) = \sum_{i=0}^{n} i^k(-1)^i$ et $D(n) = \sum_{i=0}^{n} i^2(-1)^i$.

Montrer ensuite que $C_n = \binom{2n}{n}^2$.

Exercice 14) Un graphe non orienté $G = (S, A)$ est caractérisé par son ensemble de sommets S et son ensemble d'arêtes (non-orientées) A. Soit $S_n = \{s_1, ..., s_n\}$ un ensemble de n sommets. On veut dénombrer les graphes non-orientés qui ont S_n comme ensemble de sommets. Pour cela, on commence par chercher le nombre maximal d'arêtes pour de tels graphes.

1. Dessinez les trois graphes non-orientés G_1, G_2 et G_3 ayant respectivement S_1, S_2 et S_3 comme ensemble de sommets et dont le nombre d'arêtes est maximal.

2. Calculez le nombre maximal d'arêtes $a(n)$ d'un graphe non-orienté ayant S_n comme ensemble de sommets. Vous justifierez brièvement votre réponse.

3. Déduisez-en le nombre $g(n)$ de graphes non-orientés sur l'ensemble de sommets S_n, sachant que chaque graphe a forcément entre 0 et $a(n)$ arêtes.

4. *Application numérique :* Quel est le nombre de graphes non-orientés sur l'ensemble de sommets S_3 ?