Université de Nice – Sophia Antipolis — Licence Math-Info 2

Outils Formels pour l'Informatique — 2011–2012

TD n°6

Suites récurrentes

1 Echauffement

Exercice 1) Réviser en détail la résolution de récurrences linéaires de degré 2 à coefficients constants, l'exemple type étant la suite de Fibonacci. Regardez également les suites pour lesquelles le discriminant du polynôme caractéristique est nul.

Exercice 2) Quelques suites moins classiques qui vous seront utiles,

- La suite définie par la récurrence $u_{n+1} = u_n + n$
- La suite $v_{n+1} = v_n + 2^n$
- La suite $w_{n+1} = 2w_n + 1$

Exercice 3) Il faut connaitre les séries génératrices simples, comme par exemple

- Suite constante et égale à 1
- Suite des puissances succéssives de 2

Dans chaque cas, regardez ce qui se passe si on fait commencer la suite à $n = 0$, $n = 1$ ou $n = 2$ en fixant les autres premiers termes à zéro.

2 Exercices d'entrainement

Exercice 4) La complexité $p(n)$ dans le pire des cas de l'algorithme du tri rapide (*quick-sort*) pour trier une liste de n nombres vérifie l'équation de récurrence ci-dessous. Résolvez-la, c'est-à-dire exprimez le terme général $p(n)$ de la suite $(p(n))_{n\geq 2}$ en fonction de n uniquement.

$$\begin{cases} p(2) = 3 \\ \forall n > 2,\ \ p(n) = p(n-1) + n + 1 \end{cases}$$

Exercice 5) Récurrence compléte. Résoudre la relation de récurrence :

$$\forall n \geq 0,\ \ u_n = 1 + 3\sum_{k=0}^{n-1} u_k$$

Exercice 6) Résoudre la récurrence :

- $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$
- Pour $n \geq 2$, $u_n = 4u_{n-1} - 3u_{n-2}$

Exercice 7) Suites génératrices. En dérivant $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, trouver la série génératrice de la suite des entiers naturels $u_n = n$.

Exercice 8) Séries génératrices. Déterminez les séries génératrices des suites suivantes :

1. $u_n = 3n - 1$.
2. $v_n = 3^n - 1$.

3 Pour aller plus loin

Exercice 9) Récurrence linéaire d'ordre 2. On considère l'ensemble $\mathcal{M}$ des mots sur l'alphabet $\{a, b, c\}$ tels que les suites (maximales) de c consécutifs soient toujours de longueur paire. Ainsi, le mot $accbcccca$ est un mot de $\mathcal{M}$, mais le mot $accbccca$ n'est pas un mot de $\mathcal{M}$.

1. Trouvez tous les mots de $\mathcal{M}$ de longueur n inférieure ou égale à 3.
2. On considère la définition inductive suivante de l'ensemble $\mathcal{M}$:

   (B) $\varepsilon \in \mathcal{M}$

   (I) Pour tout $m \in \mathcal{M}$,
   $am \in \mathcal{M}$
   $bm \in \mathcal{M}$
   $ccm \in \mathcal{M}$

3. Cette définition inductive est-elle ambigüe ?
4. Trouvez une relation de récurrence caractérisant le nombre M_n des mots de longueur n appartenant à $\mathcal{M}$.
5. Résolvez l'équation de récurrence correspondante, c'est-à-dire exprimez M_n en fonction de n seulement.

Exercice 10) Séries génératrices. Déterminez la suite numérique (u_n) associée à la série génératrice $f(x) = \frac{1+2x}{1-2x}$. Quelle est l'équation de récurrence satisfaite par (u_n) ?

Exercice 11) Série génératrice des nombres de Catalan. On note C_n le nombre d'arbres binaires complets (ceux dont les sommets ont 0 ou 2 fils) qui ont $2n + 1$ sommets.

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite C_n en dessinant les arbres ayant moins de 8 sommets.
2. Montrer que C_n satisfait la récurrence
   - $C_0 = 1$
   - $C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$
3. On note $C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ la série génératrice de la suite C_n. Montrer que cette fonction satisfait l'équation $C(x) = 1 + xC(x)^2$.
4. En déduire une expression de $C(x)$.