

TD n°7

Langages formels

1 Echauffement

Exercice 1) Décrire les ensembles suivants, c'est à dire tout d'abord donner tous les mots de longueur inférieure ou égale à 3 et en donner ensuite une caractérisation.

1. $A = 0(0 + 1)^*$
2. $B = (0 + 1)(0 + 1)^*$
3. $C = 0(0 + 1)^*0 + 1(0 + 1)^*1$
4. $D = (0 + 01)^*$
5. $E = 0 + 1^*$
6. $F = (0 + 1)^*(00 + 11)(0 + 1)^*$
7. $G = (0 + \varepsilon)(10)^*(1 + \varepsilon)$

Exercice 2) Trouver, pour chacun des langages suivants, une expression rationnelle qui le représente.

1. E est l'ensemble des mots qui se terminent par 01.
2. $F = \{0^i 1^j, i \geq 0, j \geq 0\}$.
3. G est l'ensemble des mots de longueur supérieure ou égale à 1 qui commencent et terminent par la même lettre.

Exercice 3) Montrer l'appartenance ou non appartenance de ces mot au langage décrit par l'expression régulière :

1. mot 10100010 et expression régulière $(0^*10)^*$?
2. mot 011100 et expression régulière $(0 + (11)^*)^*$?
3. mot 000111100 et expression régulière $((011 + 11)^*(00)^*)^*$?

2 Exercices d'entraînement

Exercice 4) Donner, *quand c'est possible*, une expression régulière décrivant les langages suivants.

1. l'ensemble de tous les octets sur $A = \{0, 1\}$;
2. les mots sur $A = \{0, 1\}$ qui se terminent par 011 ;
3. les mots sur $A = \{0, 1\}$ qui contiennent le facteur 101 ;

4. les mots sur $A = \{a, b, c\}$ comportant au moins 3 caractères et dont la troisième lettre à partir de la fin est un a ou un c ;
5. les représentations binaires des nombres impairs (sans 0 inutile en tête) ;
6. l'ensemble des mots de Dyck ;
7. $\{ww \mid w \in A^*\}$ quand A est un alphabet contenant au moins 2 lettres ;
8. $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$;
9. les mots sur $A = \{0, 1\}$ qui ont autant de 0 que de 1.

Exercice 5) Pour chacun des langages suivants sur l'alphabet $A = \{a, b\}$, donner une expression régulière représentant son complémentaire dans A^* :

1. $(a + b)^*b$;
2. $((a + b)(a + b))^*$.

Exercice 6) Soit A l'alphabet $\{a, m\}$. On considère le langage M des mots sur A qui possèdent (toutes) les propriétés suivantes :

- a peut être suivi de ε , m ou mm , mais pas de a ;
- m peut être suivi de ε , a , ou m , à condition que l'on ne trouve pas plus de deux lettres m consécutives ;
- mm doit être suivi de a ;
- un mot ne peut pas commencer par mm et ne peut pas terminer par mm .

Exemples de mots de M : $a, m, ma, am, mam, ama, mamma, amma$.

Exemples de mots n'appartenant pas à M : $mmaa, amm, ammma$.

Donner une expression régulière pour M .

3 Pour aller plus loin

Exercice 7) Donner une expression régulière des langages suivants :

1. les mots sur $\{a, b\}$ qui contiennent le facteur aa exactement une fois.
2. les mots sur $\{a, b\}$ qui commencent par a , contiennent exactement deux b et se terminent par cc .
3. les mots sur $\{a, b\}$ qui contiennent un nombre de a divisible par 3.
4. les mots sur $\{a, b\}$ de longueur impaire et qui contiennent le facteur bb .
5. les mots sur $\{a, b\}$ ayant au plus trois a .
6. les mots sur $\{a, b\}$ qui contiennent un nombre impair d'occurrences du facteur ab .
7. les représentations en base 3 des nombres pairs.

Exercice 8) Montrer qu'il existe des langages L_1 et L_2 tels que $(L_1 + L_2)^* \neq L_1^* + L_2^*$. De façon similaire, trouver des langages L_1 et L_2 tels que $(L_1 L_2)^* \neq L_1^* L_2^*$.

Exercice 9) On considère un alphabet A , une lettre a et deux langages L et M sur A .

1. Si $aL = aM$ alors a-t-on $L = M$?
2. Peut-on avoir $L^* = M^*$ quand $L \neq M$?