Théorie de l'Information

Devoir # 1
11 octobre 2006
À rendre avant le 23 octobre

SIC-SICOM

Maria-João Rendas

1. Soit X une variable aléatoire discrète. Montrer que l'entropie d'une fonction de X est inférieure ou égale à l'entropie de X en justifiant les pas suivants:

$$\begin{aligned} H(X, g(X)) &\overset{(a)}{=} H(X) + H(g(X)|X) \\ &\overset{(b)}{=} H(X) \\ H(X, g(X)) &\overset{(c)}{=} H(g(X)) + H(X|g(X)) \\ &\overset{(d)}{\geq} H(g(X)) \end{aligned}$$

   Et donc $H(g(X)) \leq H(X)$.

2. (a) Soit $Y = X^5$, où X est une variable aléatoire qui prend des valeurs entières positives et négatives. Quelle est la relation entre $H(X)$ et $H(Y)$?

   (b) Et si $Y = X^2$?

   (c) Et si $Y = \tan X$?

3. (a) Considérez qu'une pièce équilibrée est lancée. Quelle est l'information mutuelle entre la face en haut et celle qui est en bas ?

   (b) Un dé équilibré est lancé. Quelle est l'information mutuelle entre la face en haut et celle en bas ?

   (c) Quelle est l'information mutuelle entre la face en haut et celle qui est tournée vers le joueur ?

4. Supposez qu'on dispose de n pièces qui peuvent ou pas comprendre une pièce fausse. La pièce fausse peut être plus lourde ou plus légère que les vraies. On dispose d'une balance pour peser les pièces.

   (a) Comptez le nombre d'états dans lesquels l'ensemble de n pièces peut être, et le nombre de possibles résultats des k pesages. En les comparant, déterminez une borne supérieure au nombre n de pièces parmis lesquelles une suite de k pesages permettent de déterminer quelle est la pièce fausse (si elle existe) et si elle elle plus plégère ou plus lourde que les autres.

5. Une pièce est lancée jusqu'à l'occurence d'une face. Soit X le nombre de lancements.

   (a) Déterminez l'entropie $H(X)$ en bits. L'expression suivante peut être utile :

   $$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{r}{1-r}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} nr^n = \frac{r}{1-r)^2}.$$

   Déterminez une séquence de questions binaires (réponses oui/non) de la forme " $X \in S$?", où S est un ensemble, Comparez $H(X)$ avec le nombre moyen de questions nécessaires pour déterminer X.

   (b) Soit Y le nombre de lancements jusquà l'occurence d'une deuxième face. Par exemple, $Y = 5$ si la deuxième face est obtenue au cinquième lancement. Argumentez que $H(Y) = H(X_1 + X_2) < H(X_1, X_2) = 2H(X)$, et interpretez cette relation.

6. Un tournoi consiste dans une séquence de trois combats et termine aussitôt un des joueurs gagne deux combats. Soit X la variable aléatoire qui représente le résultat d'un tournoi entre les joueurs A et B, par exemple AA, ou BAB. Soit Y le nombre de combats effectués. Y peut prendre les valeurs 2 et 3.

   (a) Sous l'hypothèse que les joueurs A et B sont équilibrés et que les combats sont indépendants, calculez $H(X)$, $H(Y)$, et $H(X|Y)$.

   (b) Soit Z l'équipe gagnante. Déterminez $H(X|Z)$. Comparez avec $H(X)$. Déterminez $H(Z|X)$.

   (c) Déterminez $I(Y; Z)$.