Théorie de l'Information

Devoir # 2
16 octobre 2006

SIC-SICOM

Maria-João Rendas

1. Considérez une loi de probabilité d'une variable aléatoire $X \in \mathcal{X}$, où $|\mathcal{X}| = m$: $p = [p_1, p_2, \ldots, p_m]$. Montrez que

$$H(p_1, p_2, \ldots, p_m) = H(p_1+p_2, p_3, \ldots, p_n)+(p_1+p_2)H\left(\frac{p_1}{p_1+p_2}, \frac{p_2}{p_1+p_2}\right).$$

Interprétez cette expression.

2. La définition suivante précise la relation de dispersion plus ou moins élevée des composantes d'un vecteur.

Définition 1 *Majoration*
Soit $x, y \in R^n$ et nottons

$$x_{[1]}, \ldots, x_{[n]}$$

le vecteur obtenu en ordonnant les composantes de x par ordre décroissante. On dira que x est majoré par y si

$$\sum_{i=1}^{k} x_{[i]} \leq \sum_{i=1}^{k} y_{[i]}, \qquad k = 1, \ldots, n-1,$$

et

$$\sum_{i=1}^{n} x_{[i]} = \sum_{i=1}^{n} y_{[i]}.$$

Montrez que pour toute loi de probabilité $p = [p_1, \ldots, p_n]$,

$$p \text{ majore } \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right].$$

3. Soit p une loi de probabilité dans le simplex probabiliste de dimension n, telle que

$$p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_n.$$

Montrez que

$$H(p_1 - \delta, p_2 + \delta, p_3, \ldots, p_n) \geq H(p).$$

4. Montrez que si
$$\sum_{i=1}^{n} |p_i - q_i| \leq \theta \leq \frac{1}{2},$$
alors
$$|H(p) - H(q)| \leq -\theta \log \frac{\theta}{n}.$$

5. Montrez que
$$H\left(\sum_{i=1}^{k} p_1, 1 - \sum_{i=1}^{k} p_1\right) \leq H(p).$$

6. Montrez que
$$H(X|Y,Z) \leq H(X,Z).$$
Interprétez en termes des partitions de Ω correspondantes aux deux lois de probabilité, p et $\left(\sum_{i=1}^{k} p_1, 1 - \sum_{i=1}^{k} p_1\right)$.
Sous quelle condition peut-on avoir égalité ?

7. Montrez que
$$H(X,Y|Z) \leq H(X|Z) + H(Y|Z).$$
Sous quelle condition on observera l'égalité ?

8. Montrez que l'information mutuelle $I(X;Y)$ est
   (a) Une fonction concave de p_X.
   (b) Une fonction convexe de $p_{Y|X}$.

9. Cet exercice généralise l'information mutuelle à des groupes de variables. Il introduit en particulier la notion d'information mutuelle entre deux variables X et Y, conditionnée dans une troisième variable Z, et l'information mutuelle entre une collection de variables (X,Y) et une autre variable Z:
$$\begin{aligned} I(X;Y|Z) &= \mathrm{E}_X\left\{D\left(p(x,y|z)||p(x|z)p(y|z)\right)\right\} \\ I(X,Y;Z) &= D\left(p(x,y,z)||p(x,y)p(z)\right), \end{aligned}$$
où $D(\cdot||\cdot)$ est l'entropie relative entre deux lois de probabilité, introduite en cours. $I(X;Y|Z)$ est l'information mutuelle entre X et Y sachant Z, et $I(X,Y;Z)$ est l'information mutuelle entre le vecteur (X,Y) et Z.
Montrez que les décompositions suivante sont vraies :
$$I(X;Z) + I(X;Y|Z) = I(X;Y) + I(X;Z|Y) = I(X;Y,Z).$$

10. Considérez les définitions de l'exercice précédant. Montrez que si X et Y sont statistiquement indépendantes sachant Z, alors
$$I(X;Z) \geq I(X;Z|Y).$$
Interprétez.