Théorie de l'Information

Devoir # 4
octobre 2006

SIC-SICOM

Maria-João Rendas

1. Soit $\{X_n\}_{i=1,2,\ldots}$ une série stationnaire. Est-ce $\frac{1}{n}H(X_1^n)$ monotonne (en n)?

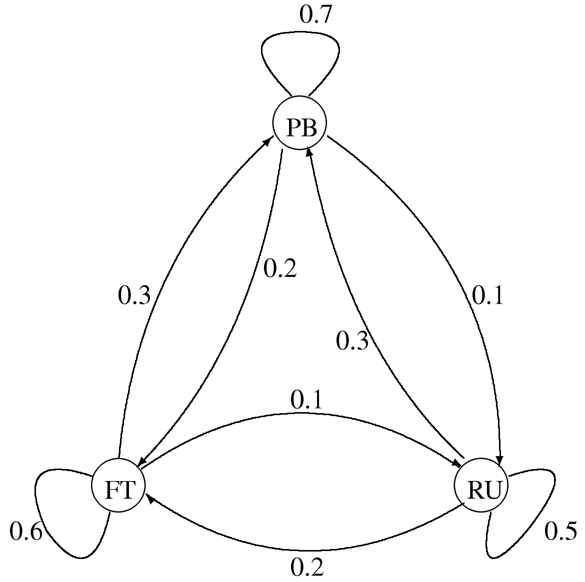
2. Considérez que l'on observe un de deux processus, X_1 ou X_2, mais on ne sait pas lequel. Quel est le taux d'entropie des observations?
Plus précisément, soit $X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n}, \ldots$ un processus de Bernoulli de paramètre p et $X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n}, \ldots$ un autre processus de Bernoulli de paramètre q, et θ une variable aléatoire qui peut prendre les valeurs 1 et 2 avec probabilité 1/2, et soit
$$Y_n = X_{\theta n}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$
   (a) Est-ce Y_n un processus stationnaire? (Remarquez que θ reste contante pour tout n.)
   (b) Est-ce Y_n une série i.i.d.?
   (c) Quel est le taux d'entropie de Y_n, $\overline{H}(Y)$? Est-ce que
   $$-\frac{1}{n}\log p(y_1, \ldots, y_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \overline{H}(Y)?$$

   Considérez maintenant que θ_n est un autre processus de Bernoulli, de paramètre $1/2$, et Z_n un autre processus d'observation
   $$Z_n = X_{\theta_n n}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$
   La valeur de θ n'est plus fixée comme pour Y_n, étant choisie, d'une manière indépendante, à chaque nouvelle observation. Répétez les questions (a) à (c) pour ce modèle.

3. Soit X_n un processus stationnaire. Lesquels de ces affirmations sont vraies? Démontrez ou donnez un contre-exemple.
   (a) $H(X_n|X_0) = H(X_{n-1}|X_0)$.
   (b) $H(X_n|X_0) \geq H(X_{n-1}|X_0)$.
   (c) $H(X_n|X_1^{n-1}, X_{n+1})$ est non-croissante en n.

4. Montrez que pour des processus stationnaires
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} I(X_1^n; X_{n+1}^{2n}) \to 0.$$

5. Un travailleur Sophopolitan prend préférentiellement ses repas de midi dans un de trois restaurants: le restaurant Universitaire (RU), le restaurant de France-Télécom (FT) où un des restaurants sur la Place Bermont (PB). À chaque période, il est beacoup plus probable qu'il choisise un restaurant où il est allé récemment, et il a des préférences marquées pour certains des trois sites, de façon que la Chaîne de Markov suivante modélise assez bien ses choix:



(a) Déterminez μ, la distribution stationnaire de cette Chaîne de Markov. Quelle fraction du temps cette personne mange à France Télécom?

(b) Calculez l'entropie de cette distribution, $H(\mu)$.

(c) Calculez le taux d'entropie de la Chaîne, $\overline{H}(X)$. Comparez avec $H(\mu)$. Justifiez intuitivement la relation trouvée.