Théorie de l'Information

Devoir # 5
3 décembre 2006

SIC-SICOM

Maria-João Rendas

1. (*Application du théorème de Sanov*)
   Considérez que $X \sim Q = [0.3\ 0.25\ 0.1\ 0.1\ 0.2\ 0.05]$. Nous voulons savoir (une approximation d'ordre 1 de) la probabilité pour que $P_x(1) \geq 0.4$, où P_x est le type d'une séquence de longueur $n = 100$ de réalisations statistiquement indépendantes de X.
2. Considérez un test de décision binaire, H_1 *versus* H_2. Les observations $X = X_1 \cdots X_n$ sont statistiquement indépendantes dans les deux cas. Caractérisez le comportement (avec n) des tests de Neyman-Pearson pour les cas suivants:
   (a) $P_i = \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1,2$
   (b) $P_i = \lambda_i e^{-\lambda_i} x, x \geq 0, i = 1,2$

   Admettez que la séquence observéé conduit à une erreur (et que n est très grand). Pour le premier de ces tests (et en admettant que $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$), quelle est la loi de probabilité de X_1 sachant que la décision est erronéee ?
3. Démontrez que projecter (au sens de minimiser l'entropie relative) une loi Q dans $\mathcal{P}_1$ et le résultat $\hat{Q}$ sur $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ est identique à projecter directement Q sur $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$. Considérez que $\mathcal{P}_1$ est le sous-ensemble du simplex probabiliste $\mathcal{P}$ défini par
   $$p \in \mathcal{P}_1 \Leftrightarrow \sum p(x) h_i(x) \geq \alpha_i, \qquad i = 1, \dots r$$
   et
   $$p \in \mathcal{P}_2 \Leftrightarrow \sum p(x) g_i(x) \geq \beta_i, \qquad i = 1, \dots s$$
   Admettez que $P \notin \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$. Soit $P^\star$ l'élément de $\mathcal{P}_1$ qui est le plus proche (au sens de $D(P||Q])$ de Q, et $R^\star$ l'élément de $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ qui est le plus proche de Q. Justifiez que $R^\star$ doit aussi être le point de $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ le plus proche de $P^\star$.
4. (*lien avec l'estimation paramétrique*)
   Considérez le test binaire entre deux éléments d'une même famille paramétrique $\mathcal{G}^\theta$ de lois de probabilité:
   $$\begin{aligned} H_1 &: X \sim p_{\theta_1}(x) \\ H_2 &: X \sim p_{\theta_2}(x) \end{aligned}$$
   Caractérisez le comportement des tests de Neyman-Pearson entre ces deux hypothèses. Démontrez que
   $$\left. \frac{\partial^2}{\partial \theta_1} D(p_{\theta_1} || p_{\theta_2}) \right|_{\theta_1 = \theta_2} = I(\theta_2)$$

et établissez la relation avec le problème de l'estimation du paramètre θ de la famille paramétrique $\mathcal{G}^{\theta}$.

Dans le papier "*Relations between Kullback-Liebler distance and Fisher Information*," par A. Dabak et D. Johnson (fourni avec cet énoncé), la relation entre l'entropie relative et l'information de Fisher est exploitée dans un cadre plus général. Faites un brève r ésumé des contributions de cet article, et illustrez-les numériquement en considérant le cas où $\mathcal{G}_{\theta}$ est une famille Gaussienne de dimension 2.