



Figure 1: Image originale I .

Théorie de l'Information

Mini-projet # 1

11 octobre 2006

SIC-SICOM

Maria-João Rendas

Ce mini-projet illustre les définitions d'**entropie**, **entropie conjointe** et **entropie conditionnelle**, par le calcul de ces grandeurs sur le lois de probabilité empiriques des pixels dans une fenêtre d'une image couleur

$$I = \{I(i, j), (i, j) \in \{1, \dots, 1728\} \times \{1, \dots, 2304\}\}.$$

(l'image *Photo.jpg*, voire Figure 1, est utilisée, mais vous pouvez facilement la remplacer par une autre image).

Il commence par vous demander d'indiquer (avec la souris) les limites de la fenêtre rectangulaire $W \subset I$ de taille $n_l \times n_c$ (voire un exemple dans la Figure 2) qui sera effectivement utilisée pour le calcul des lois empiriques. L'objectif de la limitation de l'analyse à une sous-image est double:

1. il permet de réduire le calcul nécessaire pour estimer les lois marginales et conjointes,
2. il permet d'observer la variation des différentes mesures calculées, en choisissant de fenêtres avec des caractéristiques différentes.



Figure 2: Sous-image analysée W .

L'image de couleur I a 3 composantes (représentées dans la Figure 3 générée par le script) mais dans la version fournie on ne traite que les 2 premières:

$$I_r = W(\cdot, \cdot, 1), \quad I_g = W(\cdot, \cdot, 2).$$

Les lois empiriques sont ensuite déterminées:

$$p_r(r_i) = \frac{1}{|W|} \sum_{i,j} \delta_{I_r(i,j)-r_i}, \quad p_g(g_j) = \frac{1}{|W|} \sum_{i,j} \delta_{I_g(i,j)-g_j}; \quad n = 1, \dots, 255,$$

où $|W| = n_c \times n_c$ est la taille de la fenêtre d'analyse W . Ces estimées admettent que les observations dans I_r (et de même pour I_g) sont des tirages statistiquement indépendants d'une même loi, et dans l'expression précédente δ_x est le symbole de Kroenecker:

$$\delta_x = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0. & x \neq 0 \end{cases}$$

La Figure 4 du script (voire Figure 3 de ce document) représente les lois obtenues pour la fenêtre sélectionnée. Pour le cas considérée, les deux variables ont une loi de probabilité avec une forme similaire, mais nous pouvons tout de suite remarquer que l'ensemble de valeurs distinctes prises par I_g est de taille supérieure ($M_g > M_r$).

Dans la fenêtre de travail sont alors montrées les valeurs estimées des entropies $H(r)$ et $H(g)$, et il est vérifié que les bornes étudiées sont satisfaites:

$$0 \leq H(X) \leq \log M_X, \quad X \in \{r, g\}.$$

où M_X est le nombre de valeurs différentes prises par la variable X .

On passe ensuite au calcul de l'entropie conjointe, en utilisant la définition donnée en cours :

$$H(r, g) = \sum_{r_i, g_j} p_{r,g}(r_i, g_j) \log \frac{1}{p_{r,g}(r_i, g_j)}$$

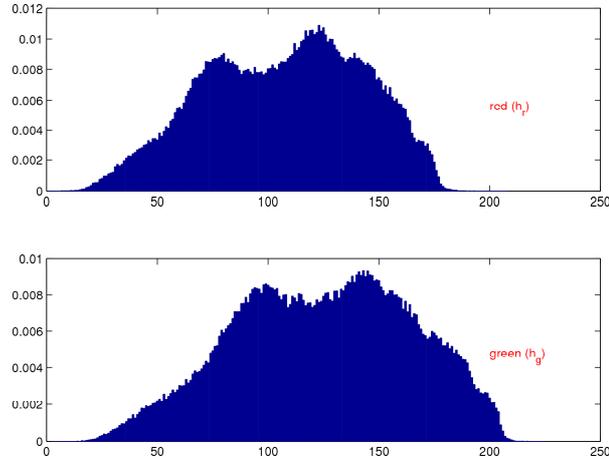


Figure 3: Lois empiriques p_r et p_g .

Pour cela, la distribution conjointe $p_{r,g}$ est estimée par sa loi empirique:

$$p_{r,g}(r_i, g_j) = \frac{1}{|W|} \sum_{i,j} \delta_{I_r(i,j)-r_i} \delta_{I_g(i,j)-g_j},$$

qui est représentée dans la Figure 5 (voir Figure 4 de ce document) en code de couleur (la barre latérale indique le code utilisé). Comme cette figure montre, les deux variables sont fortement corrélées, la masse de probabilité étant concentrée près de la diagonal $r_i = g_i$.

La valeur de l'**entropie conjointe** est alors calculée, et il est vérifié que les inégalités vues en cours sont satisfaites :

$$\max(H(r), H(g)) \leq H(r, g) \leq H(r) + H(g).$$

L'éloignement par rapport à la borne supérieure confirme que les deux variables ne sont pas statistiquement indépendantes, comme il est apparent de l'observation de la loi conjointe dans la Figure 4.

Nous passons alors au calcul de l'**entropie conditionnelle** $H(r|g)$, en utilisant la définition

$$H(r|g) = \sum_{g_i} p_g(g_i) \sum_{r_i} p_{r|g}(r_i|g_i) \log \frac{1}{p_{r|g}(r_i|g_i)}.$$

Pour cela nous calculons d'abord les densités conditionnelles $p(r|g_i)$, $i = 1, \dots, 255$ en utilisant la formule de Bayes :

$$p_{r|g}(r_i|g_j) = \frac{p_{r,g}(r_i, g_j)}{p_g(g_j)},$$

où $p_g(\cdot)$ est la loi marginale qui avait été calculée au début.

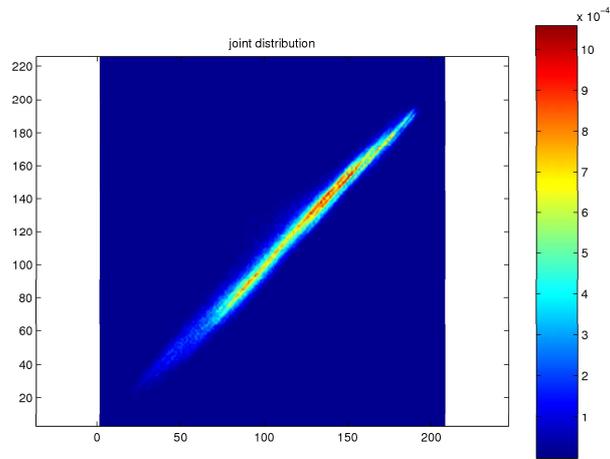


Figure 4: Loi conjointe $p_{r,g}$.

Ces densités sont représentées collectivement dans la Figure 6 (voire Figure 5 de ce document), en code de couleurs (chaque ligne de cette surface est une densité conditionnelle pour r). En cliquant sur une ligne de cette Figure, une autre Figure s'affiche, avec la représentation de la loi conditionnelle correspondante. La Figure 6 illustre deux de ces densités conditionnelles.

Finalement, nous montrons que l'entropie conditionnelle $H(r|g)$ est bien majorée par l'entropie $H(r)$:

$$0 \leq H(r|g) \leq H(r) ,$$

et que la décomposition vue en cours est vérifiée :

$$H(r, g) = H(r|g) + H(g).$$

Nous vous proposons d'utiliser et de modifier le script fourni pour effectuer les études suivantes:

1. Analyser comment les grandeurs calculées (entropie, entropie conditionnelle, entropie conjointe) varient avec les caractéristiques de la fenêtre W de l'image qui est choisie.
2. Calculer l'**information mutuelle** entre r et g , $I(r, g)$ (et vérifier la symmétrie de la définition).
3. Calculer l'**entropie relative** de r par rapport à p_g , $D(p_r||p_g)$. Vérifier qu'elle n'est pas symétrique, $D(p_r||p_g) \neq D(p_g||p_r)$.

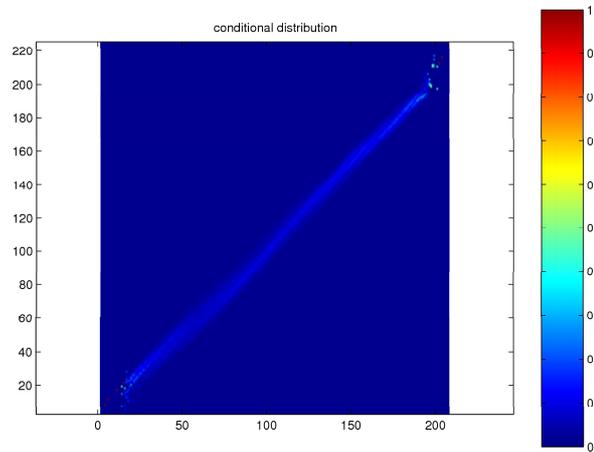


Figure 5: Lois conditionnelles $p(r|g_j)$.

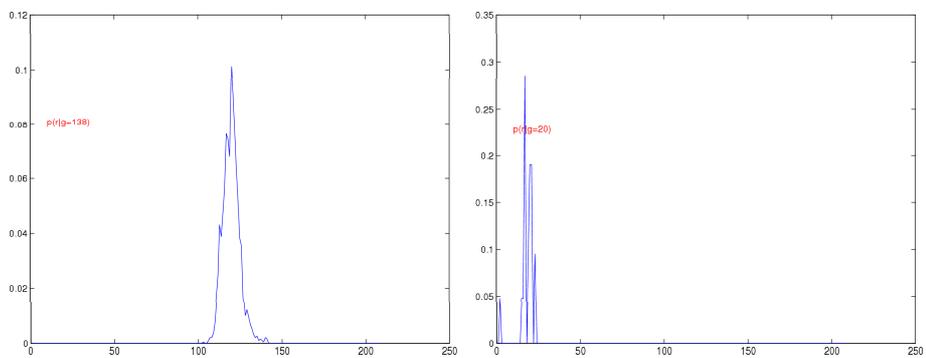


Figure 6: Lois conditionnelles $p(r|g_j)$ pour deux valeurs particulières de g_j (indiqués à rouge dans les plots) .