

Analyse statique des réseaux Booléens pour la biologie systémique

Partie 1 : Étude des points fixes par une approche combinatoire

Adrien Richard, I3S, CNRS & Université Côte d'Azur

en collaboration avec

Julio Aracena & Lilian Salinas
Universidad de Concepción, Chile

et

Maximilien Gadouleau
Durham University, UK

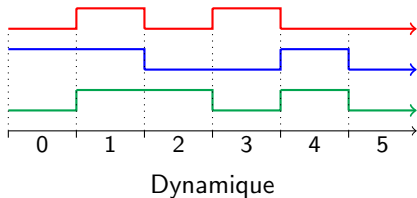
Partie 2 : Étude des trajectoires par interprétation abstraite

Loïc Paulevé, LRI, CNRS & Université Paris-Sud

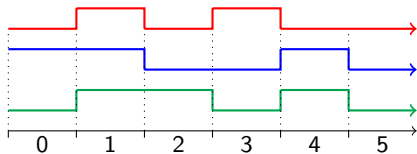
EJCIM 2018, Nancy, 26-30 mars 2018

Un **réseau Booléen** est un **système dynamique discret** composé d'un **nombre fini de variables binaires** qui évoluent, dans un **temps discret** et par **interactions mutuelles**, selon une **loi prédéfinie**.

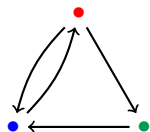
Un **réseau Booléen** est un **système dynamique discret** composé d'un **nombre fini de variables binaires** qui évoluent, dans un **temps discret** et par **interactions mutuelles**, selon une **loi prédéfinie**.



Un **réseau Booléen** est un **système dynamique discret** composé d'un **nombre fini de variables binaires** qui évoluent, dans un **temps discret** et par **interactions mutuelles**, selon une **loi prédéfinie**.



Dynamique



Graphe d'interaction

Un **réseau Booléen** est un **système dynamique discret** composé d'un **nombre fini de variables binaires** qui évoluent, dans un **temps discret** et par **interactions mutuelles**, selon une **loi prédéfinie**.

↔ Les variables sont indexées de 1 à n .

↔ L'ensemble des **états**/**configurations** possibles est $\{0, 1\}^n$,

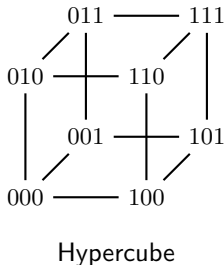
Un **réseau Booléen** est un **système dynamique discret** composé d'un **nombre fini de variables binaires** qui évoluent, dans un **temps discret** et par **interactions mutuelles**, selon une **loi prédéfinie**.

↔ Les variables sont indexées de 1 à n .

↔ L'ensemble des **états/configurations** possibles est $\{0, 1\}^n$,

Exemple avec $n = 3$

$$\{0, 1\}^3 = \begin{cases} 000 \\ 001 \\ 010 \\ 011 \\ 100 \\ 101 \\ 110 \\ 111 \end{cases}$$



Un **réseau Booléen (RB)** à n composantes est une fonction

$$f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$$

$$x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$$

Un **réseau Booléen (RB)** à n composantes est une fonction

$$f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$$

$$x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$$

fonction de transition **globale**
(loi d'évolution)

fonctions de transitions **locales**
(de $\{0, 1\}^n$ dans $\{0, 1\}$)

Un **réseau Booléen (RB)** à n composantes est une fonction

$$f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$$
$$x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$$

La **dynamique** est décrite par les itérations successive de f :

$$x \rightarrow f(x) \rightarrow f^2(x) \rightarrow f^3(x) \rightarrow \dots$$

Un **réseau Booléen (RB)** à n composantes est une fonction

$$f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$$
$$x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$$

La **dynamique** est décrite par les itérations successive de f :

$$x \rightarrow f(x) \rightarrow f^2(x) \rightarrow f^3(x) \rightarrow \dots$$

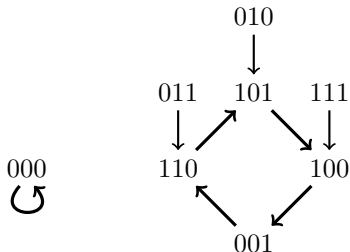
Un **point point** est une configuration x telle que $x = f(x)$.

points fixes = états stables

Exemple 1 avec $n = 3$

$$\begin{cases} f_1(x) = x_2 \vee x_3 \\ f_2(x) = \overline{x_1} \wedge \overline{x_3} \\ f_3(x) = \overline{x_3} \wedge (x_1 \vee x_2) \end{cases}$$

x	$f(x)$
000	000
001	110
010	101
011	110
100	001
101	100
110	101
111	100



Le **graphe d'interaction** de f est le **graphe signé** G définie par :

- l'ensemble des sommets est $\{1, \dots, n\}$
- il existe un **arc positif** $j \rightarrow i$ s'il existe $x \in \{0, 1\}^n$ tel que

$$f_i(x_1, \dots, x_{j-1}, \mathbf{0}, x_{j+1}, \dots, x_n) = \mathbf{0}$$

$$f_i(x_1, \dots, x_{j-1}, \mathbf{1}, x_{j+1}, \dots, x_n) = \mathbf{1}$$

- il existe un **arc négatif** $j \rightarrow i$ s'il existe $x \in \{0, 1\}^n$ tel que

$$f_i(x_1, \dots, x_{j-1}, \mathbf{0}, x_{j+1}, \dots, x_n) = \mathbf{1}$$

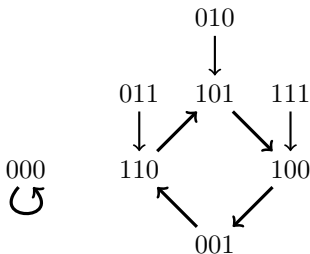
$$f_i(x_1, \dots, x_{j-1}, \mathbf{1}, x_{j+1}, \dots, x_n) = \mathbf{0}$$

Exemple 1

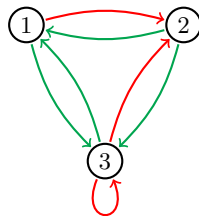
$$\begin{cases} f_1(x) = x_2 \vee x_3 \\ f_2(x) = \overline{x_1} \wedge \overline{x_3} \\ f_3(x) = \overline{x_3} \wedge (x_1 \vee x_2) \end{cases}$$

x	$f(x)$
000	000
001	110
010	101
011	110
100	001
101	100
110	101
111	100

Dynamique



Graphe d'interaction

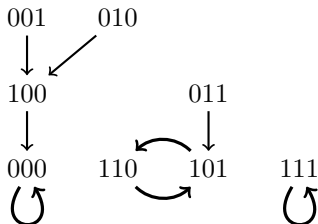


Exemple 2

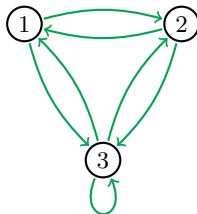
$$\begin{cases} f_1(x) = x_2 \vee x_3 \\ f_2(x) = x_1 \wedge x_3 \\ f_3(x) = x_3 \wedge (x_1 \vee x_2) \end{cases}$$

x	$f(x)$
000	000
001	100
010	100
011	101
100	000
101	110
110	101
111	111

Dynamique



Graphe d'interaction

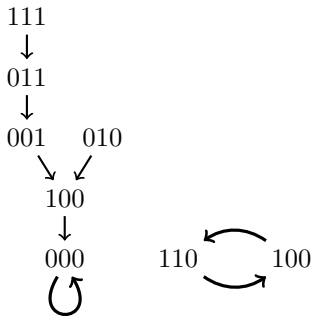


Exemple 3

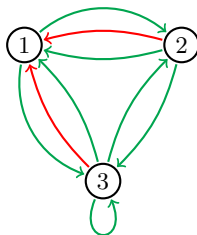
$$\begin{cases} f_1(x) = x_2 + x_3 \\ f_2(x) = x_1 \wedge x_3 \\ f_3(x) = x_3 \wedge (x_1 \vee x_2) \end{cases}$$

x	$f(x)$
000	000
001	100
010	100
011	001
100	000
101	110
110	101
111	011

Dynamique



Graphe d'interaction

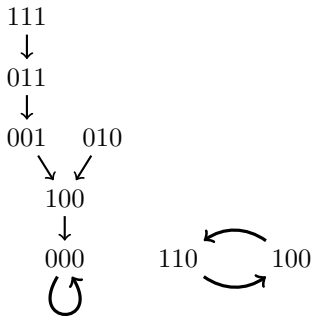


Exemple 3

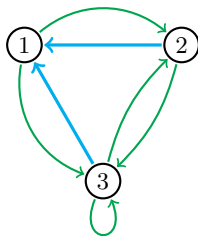
$$\begin{cases} f_1(x) = x_2 + x_3 \\ f_2(x) = x_1 \wedge x_3 \\ f_3(x) = x_3 \wedge (x_1 \vee x_2) \end{cases}$$

x	$f(x)$
000	000
001	100
010	100
011	001
100	000
101	110
110	101
111	011

Dynamique



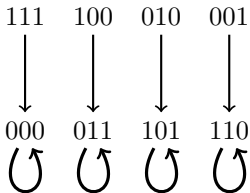
Graphe d'interaction



Exemple 4

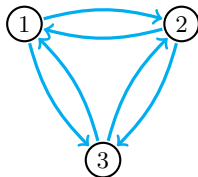
$$\begin{cases} f_1(x) = x_2 + x_3 \\ f_2(x) = x_3 + x_1 \\ f_3(x) = x_1 + x_2 \end{cases}$$

Dynamique



x	$f(x)$
000	000
001	110
010	101
011	011
100	011
101	101
110	110
111	000

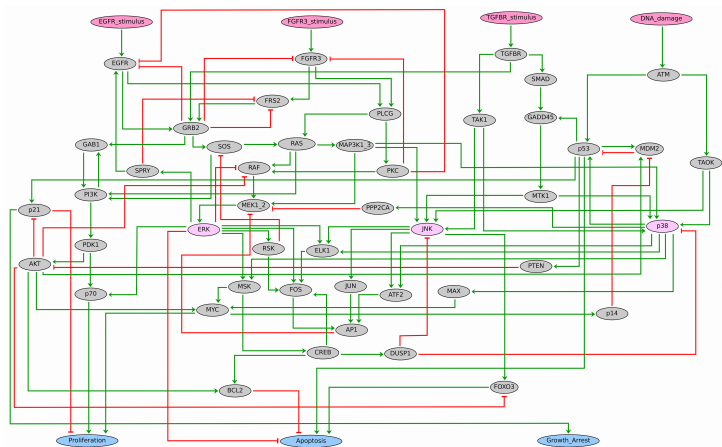
Graphe d'interaction



Beaucoup d'applications, en particulier :

- Réseaux de neurones [McCulloch & Pitts 1943]
- Réseaux de gènes [Kauffman 1969, Thomas 1973]

Dans le contexte des réseaux de gènes, les première informations fiables concernent souvent le graphe d'interaction



Beaucoup d'applications, en particulier :

- Réseaux de neurones [McCulloch & Pitts 1943]
- Réseaux de gènes [Kauffman 1969, Thomas 1973]

Question

1. *Que peut-on dire sur la **dynamique** d'un réseau Booléen en fonction de son **graphe d'interaction** seulement ?*

Beaucoup d'applications, en particulier :

- Réseaux de neurones [McCulloch & Pitts 1943]
- Réseaux de gènes [Kauffman 1969, Thomas 1973]

Question

1. *Que peut-on dire sur la **dynamique** d'un réseau Booléen en fonction de son **graphe d'interaction** seulement ?*

Question difficile

↪ le nombre de RBs sur un graphe G donné est au moins $2^{2^{\Omega(\Delta^-)}}$,
où Δ^- est le degré entrant max de G .

Beaucoup d'applications, en particulier :

- Réseaux de neurones [McCulloch & Pitts 1943]
- Réseaux de gènes [Kauffman 1969, Thomas 1973]

Question

1. *Que peut-on dire sur la **dynamique** d'un réseau Booléen en fonction de son **graphe d'interaction** seulement ?*
2. *Que peut-on dire sur le **nb de points fixes** d'un réseau Booléen en fonction de son **graphe d'interaction** seulement ?*

Beaucoup d'applications, en particulier :

- Réseaux de neurones [McCulloch & Pitts 1943]
- Réseaux de gènes [Kauffman 1969, Thomas 1973]

Question

1. *Que peut-on dire sur la **dynamique** d'un réseau Booléen en fonction de son **graphe d'interaction** seulement ?*
2. *Que peut-on dire sur le **nb de points fixes** d'un réseau Booléen en fonction de son **graphe d'interaction** seulement ?*

Nombre de points fixes dans le réseau de gènes d'un organisme multicellulaire \approx Nombre de types cellulaires dans l'organisme

Definitions

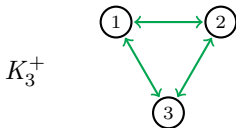
$\max(G) :=$ **nombre max de points fixes** dans un RB sur G

$\min(G) :=$ **nombre min de points fixes** dans un RB sur G

Definitions

$\max(G) :=$ nombre max de points fixes dans un RB sur G

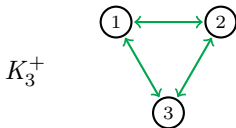
$\min(G) :=$ nombre min de points fixes dans un RB sur G



Definitions

$\max(G) :=$ nombre max de points fixes dans un RB sur G

$\min(G) :=$ nombre min de points fixes dans un RB sur G



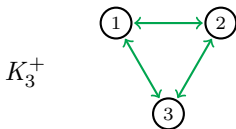
Il y a 8 réseaux possibles sur K_3^+ , car pour chaque composante i ,

$$f_i(x) = x_{i-1} \wedge x_{i+1} \quad \text{ou} \quad f_i(x) = x_{i-1} \vee x_{i+1}$$

Definitions

$\max(G) :=$ nombre max de points fixes dans un RB sur G

$\min(G) :=$ nombre min de points fixes dans un RB sur G

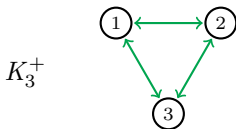


x	$f(x)$	$f(x)$	$f(x)$	$f(x)$	$f(x)$	$f(x)$	$f(x)$	$f(x)$
000	000	000	000	000	000	000	000	000
001	000	100	010	110	000	100	010	110
010	000	100	000	100	001	101	001	101
011	100	100	110	110	101	101	111	111
100	000	000	010	010	001	001	011	011
101	010	110	010	110	011	111	011	111
110	001	101	011	111	001	101	011	111
111	111	111	111	111	111	111	111	111

Definitions

$\max(G) :=$ nombre max de points fixes dans un RB sur G

$\min(G) :=$ nombre min de points fixes dans un RB sur G



8 réseaux possibles

$$\max(K_3^+) = 2$$

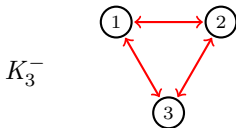
$$\min(K_3^+) = 2$$

x	$f(x)$	$f(x)$	$f(x)$	$f(x)$	$f(x)$	$f(x)$	$f(x)$	$f(x)$
000	000	000	000	000	000	000	000	000
001	000	100	010	110	000	100	010	110
010	000	100	000	100	001	101	001	101
011	100	100	110	110	101	101	111	111
100	000	000	010	010	001	001	011	011
101	010	110	010	110	011	111	011	111
110	001	101	011	111	001	101	011	111
111	111	111	111	111	111	111	111	111

Definitions

$\max(G) :=$ nombre max de points fixes dans un RB sur G

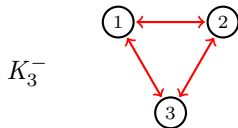
$\min(G) :=$ nombre min de points fixes dans un RB sur G



Definitions

$\max(G) :=$ nombre max de points fixes dans un RB sur G

$\min(G) :=$ nombre min de points fixes dans un RB sur G



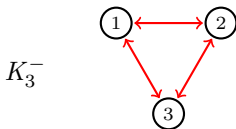
Il y a 8 réseaux possibles sur K_3^- , car pour chaque composante i ,

$$f_i(x) = \overline{x_{i-1}} \wedge \overline{x_{i+1}} \quad \text{ou} \quad f_i(x) = \overline{x_{i-1}} \vee \overline{x_{i+1}}$$

Definitions

$\max(G) :=$ nombre max de points fixes dans un RB sur G

$\min(G) :=$ nombre min de points fixes dans un RB sur G

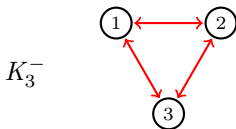


x	$f(x)$	$f(x)$	$f(x)$	$f(x)$	$f(x)$	$f(x)$	$f(x)$	$f(x)$
000	111	111	111	111	111	111	111	111
001	001	101	011	111	001	101	011	111
010	010	110	010	110	011	111	011	111
011	000	000	010	010	001	001	011	011
100	100	100	110	110	101	101	111	111
101	000	100	000	100	001	101	001	101
110	000	100	010	110	000	100	010	110
111	000	000	000	000	000	000	000	000

Definitions

$\max(G) :=$ nombre max de points fixes dans un RB sur G

$\min(G) :=$ nombre min de points fixes dans un RB sur G

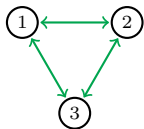


8 réseaux possibles

$$\max(K_3^-) = 3$$

$$\min(K_3^-) = 1$$

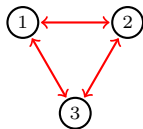
x	$f(x)$	$f(x)$	$f(x)$	$f(x)$	$f(x)$	$f(x)$	$f(x)$	$f(x)$
000	111	111	111	111	111	111	111	111
001	001	101	011	111	001	101	011	111
010	010	110	010	110	011	111	011	111
011	000	000	010	010	001	001	011	011
100	100	100	110	110	101	101	111	111
101	000	100	000	100	001	101	001	101
110	000	100	010	110	000	100	010	110
111	000	000	000	000	000	000	000	000



8 réseaux possibles

$$\max(K_3^+) = 2$$

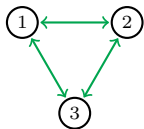
$$\min(K_3^+) = 2$$



8 réseaux possibles

$$\max(K_3^-) = 3$$

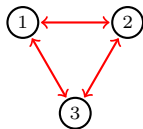
$$\min(K_3^-) = 1$$



8 réseaux possibles

$$\max(K_3^+) = 2$$

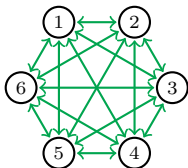
$$\min(K_3^+) = 2$$



8 réseaux possibles

$$\max(K_3^-) = 3$$

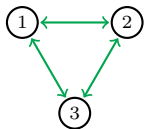
$$\min(K_3^-) = 1$$



$\sim 10^{41}$ réseaux possibles

$$4 \leq \max(K_6^+) \leq 16$$

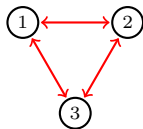
$$\min(K_6^+) = 2$$



8 réseaux possibles

$$\max(K_3^+) = 2$$

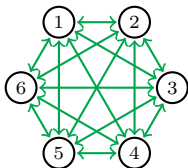
$$\min(K_3^+) = 2$$



8 réseaux possibles

$$\max(K_3^-) = 3$$

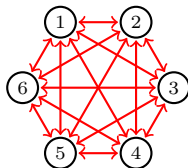
$$\min(K_3^-) = 1$$



$\sim 10^{41}$ réseaux possibles

$$4 \leq \max(K_6^+) \leq 16$$

$$\min(K_6^+) = 2$$



$\sim 10^{41}$ réseaux possibles

$$\max(K_6^-) = 20$$

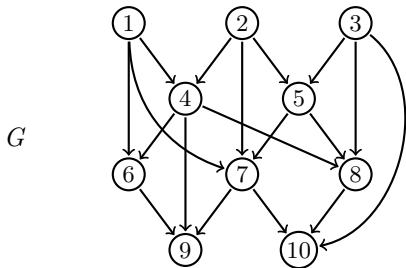
$$\min(K_6^+) = 0$$

Sommaire

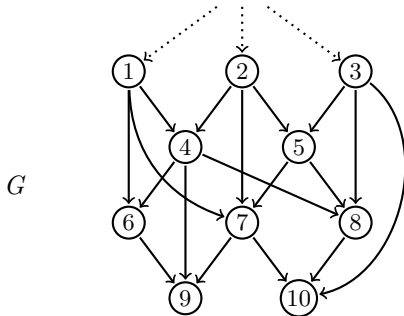
1. Absence de cycle
2. Cycles positifs et négatifs
3. Absence de cycle d'un signe donné
4. Borne du feedback positif
5. Cliques positives et négatives
6. Le cas monotone
7. Conclusion

Sommaire

1. **Absence de cycle**
2. Cycles positifs et négatifs
3. Absence de cycle d'un signe donné
4. Borne du feedback positif
5. Cliques positives et négatives
6. Le cas monotone
7. Conclusion

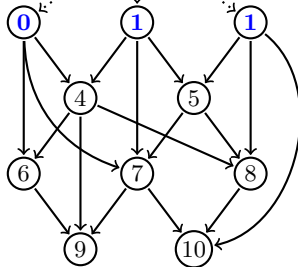


fonctions locales constantes



fonctions locales constantes

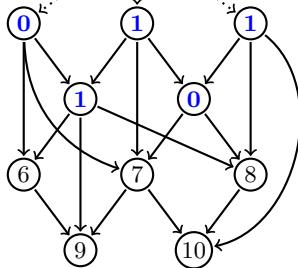
itération 1



fonctions locales constantes

itération 1

itération 2

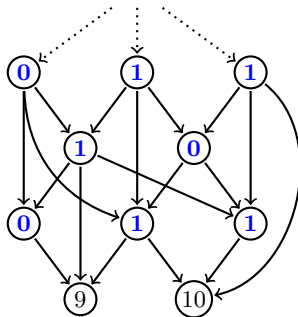


fonctions locales constantes

itération 1

itération 2

itération 3



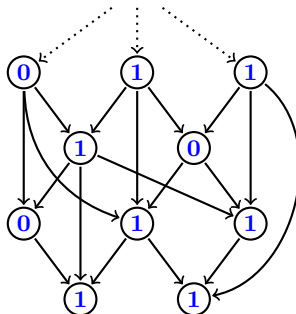
fonctions locales constantes

itération 1

itération 2

itération 3

itération 4



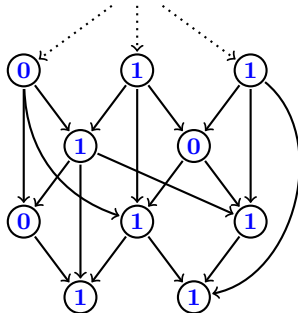
fonctions locales constantes

itération 1

itération 2

itération 3

itération 4



stabilisation

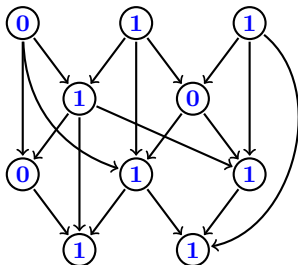


itération 1

itération 2

itération 3

itération 4



stabilisation

Théorème [Robert, 1980]

Si G est acyclique alors f^n est constante, donc

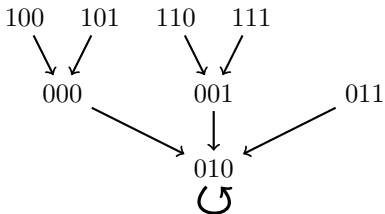
$$\min(G) = \max(G) = 1.$$

Exemple 1

$$\begin{cases} f_1(x) &= 0 \\ f_2(x) &= \overline{x_1} \\ f_3(x) &= x_1 \wedge x_2 \end{cases}$$

x	$f(x)$
000	010
001	010
010	010
011	010
100	000
101	000
110	001
111	001

Dynamique



Grphe d'interaction

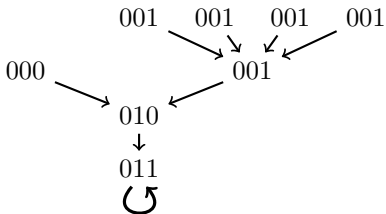


Exemple 2

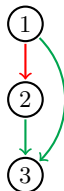
$$\begin{cases} f_1(x) &= 0 \\ f_2(x) &= \overline{x_1} \\ f_3(x) &= x_1 \vee x_2 \end{cases}$$

x	$f(x)$
000	010
001	010
010	011
011	011
100	001
101	001
110	001
111	001

Dynamique



Grphe d'interaction



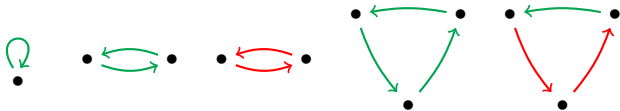
François Robert [1980]

pas de cycle \Rightarrow dynamique 'simple'

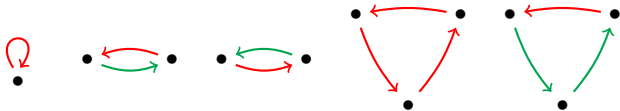
dynamique 'complexe' \Rightarrow cycles

René Thomas [1981] : deux types de cycles, **positifs** et **négatifs**.

1. Cycle **positif** : nombre **pair** d'arcs **positifs**



2. Cycle **néгатif** : nombre **impair** d'arcs **néгатifs**



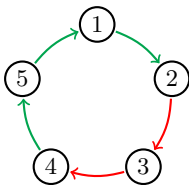
Sommaire

1. Absence de cycle
2. **Cycles positifs et négatifs isolés**
3. Absence de cycle d'un signé donné
4. Borne du feedback positif
5. Cliques positives et négatives
6. Le cas monotone
7. Conclusion

Dans un cycle, chaque sommet i a un unique prédécesseur j , et

$$f_i(x) = \begin{cases} x_j & \text{si } j \rightarrow i \text{ est positif} \\ \overline{x_j} & \text{si } j \rightarrow i \text{ est négatif} \end{cases}$$

Exemple



$$f_1(x) = x_5$$

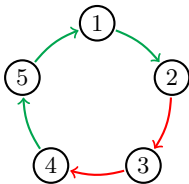
$$f_2(x) = x_1$$

$$f_3(x) = \overline{x_2}$$

$$f_4(x) = \overline{x_3}$$

$$f_5(x) = x_4$$

Points fixes pour un cycle positif



$$f_1(x) = x_5$$

$$f_2(x) = x_1$$

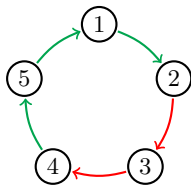
$$f_3(x) = \overline{x_2}$$

$$f_4(x) = \overline{x_3}$$

$$f_5(x) = x_4$$

$$x = f(x) \iff \begin{cases} x_1 = x_5 \\ x_2 = x_1 \\ x_3 = \overline{x_2} \\ x_4 = \overline{x_3} \\ x_5 = x_4 \end{cases}$$

Points fixes pour un cycle positif



$$f_1(x) = x_5$$

$$f_2(x) = x_1$$

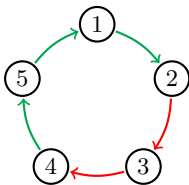
$$f_3(x) = \overline{x_2}$$

$$f_4(x) = \overline{x_3}$$

$$f_5(x) = x_4$$

$$x = f(x) \iff \begin{cases} x_1 = x_5 \\ x_2 = x_1 \\ x_3 = \overline{x_2} = \overline{x_1} \\ x_4 = \overline{x_3} \\ x_5 = x_4 \end{cases}$$

Points fixes pour un cycle positif



$$f_1(x) = x_5$$

$$f_2(x) = x_1$$

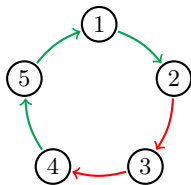
$$f_3(x) = \overline{x_2}$$

$$f_4(x) = \overline{x_3}$$

$$f_5(x) = x_4$$

$$x = f(x) \iff \begin{cases} x_1 = x_5 \\ x_2 = x_1 \\ x_3 = \overline{x_2} = \overline{x_1} \\ x_4 = \overline{x_3} = x_1 \\ x_5 = x_4 \end{cases}$$

Points fixes pour un cycle positif



$$f_1(x) = x_5$$

$$f_2(x) = x_1$$

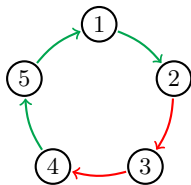
$$f_3(x) = \overline{x_2}$$

$$f_4(x) = \overline{x_3}$$

$$f_5(x) = x_4$$

$$x = f(x) \iff \begin{cases} x_1 = x_5 \\ x_2 = x_1 \\ x_3 = \overline{x_2} = \overline{x_1} \\ x_4 = \overline{x_3} = x_1 \\ x_5 = x_4 = x_1 \end{cases}$$

Points fixes pour un cycle positif



$$f_1(x) = x_5$$

$$f_2(x) = x_1$$

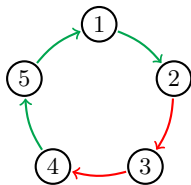
$$f_3(x) = \overline{x_2}$$

$$f_4(x) = \overline{x_3}$$

$$f_5(x) = x_4$$

$$x = f(x) \iff \begin{cases} x_1 = x_5 \\ x_2 = x_1 \\ x_3 = \overline{x_2} = \overline{x_1} \\ x_4 = \overline{x_3} = x_1 \\ x_5 = x_4 = x_1 \end{cases} \iff x = (x_1, x_1, \overline{x_1}, x_1, x_1)$$

Points fixes pour un cycle positif



$$f_1(x) = x_5$$

$$f_2(x) = x_1$$

$$f_3(x) = \overline{x_2}$$

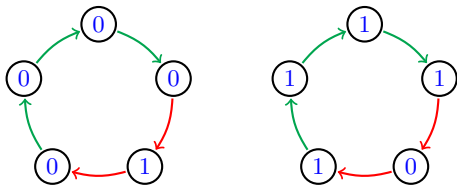
$$f_4(x) = \overline{x_3}$$

$$f_5(x) = x_4$$

$$x = f(x) \iff \begin{cases} x_1 = x_5 \\ x_2 = x_1 \\ x_3 = \overline{x_2} = \overline{x_1} \\ x_4 = \overline{x_3} = x_1 \\ x_5 = x_4 = x_1 \end{cases} \iff x = (x_1, x_1, \overline{x_1}, x_1, x_1)$$

Il y a exactement deux points fixes : **00100** et **11011**.

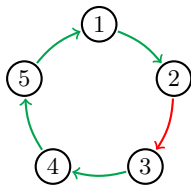
Points fixes pour un cycle positif



$$x = f(x) \iff \begin{cases} x_1 = x_5 \\ x_2 = x_1 \\ x_3 = \overline{x_2} = \overline{x_1} \\ x_4 = \overline{x_3} = x_1 \\ x_5 = x_4 = x_1 \end{cases} \iff x = (x_1, x_1, \overline{x_1}, x_1, x_1)$$

Il y a exactement deux points fixes : **00100** et **11011**.

Points fixes pour un cycle négatif



$$f_1(x) = x_5$$

$$f_2(x) = x_1$$

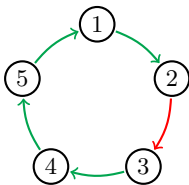
$$f_3(x) = \overline{x_2}$$

$$f_4(x) = x_3$$

$$f_5(x) = x_4$$

$$x = f(x) \iff \begin{cases} x_1 = x_5 \\ x_2 = x_1 \\ x_3 = \overline{x_2} \\ x_4 = x_3 \\ x_5 = x_4 \end{cases}$$

Points fixes pour un cycle négatif



$$f_1(x) = x_5$$

$$f_2(x) = x_1$$

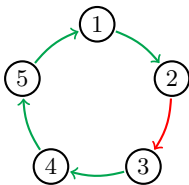
$$f_3(x) = \overline{x_2}$$

$$f_4(x) = x_3$$

$$f_5(x) = x_4$$

$$x = f(x) \iff \begin{cases} x_1 = x_5 \\ x_2 = x_1 \\ x_3 = \overline{x_2} = \overline{x_1} \\ x_4 = x_3 \\ x_5 = x_4 \end{cases}$$

Points fixes pour un cycle négatif



$$f_1(x) = x_5$$

$$f_2(x) = x_1$$

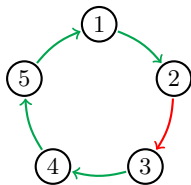
$$f_3(x) = \overline{x_2}$$

$$f_4(x) = x_3$$

$$f_5(x) = x_4$$

$$x = f(x) \iff \begin{cases} x_1 = x_5 \\ x_2 = x_1 \\ x_3 = \overline{x_2} = \overline{x_1} \\ x_4 = x_3 = \overline{x_1} \\ x_5 = x_4 \end{cases}$$

Points fixes pour un cycle négatif



$$f_1(x) = x_5$$

$$f_2(x) = x_1$$

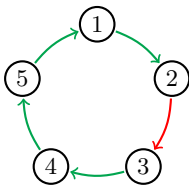
$$f_3(x) = \overline{x_2}$$

$$f_4(x) = x_3$$

$$f_5(x) = x_4$$

$$x = f(x) \iff \begin{cases} x_1 = x_5 \\ x_2 = x_1 \\ x_3 = \overline{x_2} = \overline{x_1} \\ x_4 = x_3 = \overline{x_1} \\ x_5 = x_4 = \overline{x_1} \end{cases}$$

Points fixes pour un cycle négatif



$$f_1(x) = x_5$$

$$f_2(x) = x_1$$

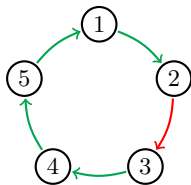
$$f_3(x) = \overline{x_2}$$

$$f_4(x) = x_3$$

$$f_5(x) = x_4$$

$$x = f(x) \iff \begin{cases} x_1 = x_5 \\ x_2 = x_1 \\ x_3 = \overline{x_2} = \overline{x_1} \\ x_4 = x_3 = \overline{x_1} \\ x_5 = x_4 = \overline{x_1} \end{cases} \Rightarrow \text{contradiction}$$

Points fixes pour un cycle négatif



$$f_1(x) = x_5$$

$$f_2(x) = x_1$$

$$f_3(x) = \overline{x_2}$$

$$f_4(x) = x_3$$

$$f_5(x) = x_4$$

$$x = f(x) \iff \begin{cases} x_1 = x_5 \\ x_2 = x_1 \\ x_3 = \overline{x_2} = \overline{x_1} \\ x_4 = x_3 = \overline{x_1} \\ x_5 = x_4 = \overline{x_1} \end{cases} \Rightarrow \text{contradiction}$$

Il n'y a pas de point fixe !

Proposition

1. Si G est un cycle *positif*,

$$\min(G) = \max(G) = 2.$$

1. Si G est un cycle *négatif*,

$$\min(G) = \max(G) = 0.$$

Sommaire

1. Absence de cycle
2. Cycles positifs et négatifs
3. **Absence de cycle d'un signe donné**
4. Borne du feedback positif
5. Cliques positives et négatives
6. Le cas monotone
7. Conclusion

Théorème [Aracena, 2008]

Soit G un graphe d'interaction.

1. *Si G n'a que des cycles **positifs**, alors $\min(G) \geq 1$.*
2. *Si G n'a que des cycles **négatifs**, alors $\max(G) \leq 1$.*

Théorème [Aracena, 2008]

Soit G un graphe d'interaction.

1. Si G n'a que des cycles *positifs*, alors $\min(G) \geq 1$.
2. Si G n'a que des cycles *négatifs*, alors $\max(G) \leq 1$.

Corollary [Robert 1980]

Si G est acyclique, alors $\min(G) = \max(G) = 1$.

Théorème [Aracena, 2008]

Soit G un graphe d'interaction.

1. *Si G n'a que des cycles **positifs**, alors $\min(G) \geq 1$.*
2. *Si G n'a que des cycles **négatifs**, alors $\max(G) \leq 1$.*

Soit G un graphe d'interaction fortement connexe.

3. *Si G n'a que des cycles **positifs**, alors $\min(G) \geq 2$.*
4. *Si G n'a que des cycles **négatifs**, alors $\max(G) = 0$.*

Corollary [Robert 1980]

Si G est acyclique, alors $\min(G) = \max(G) = 1$.

Théorème [Aracena, 2008]

Soit G un graphe d'interaction.

1. Si G n'a que des cycles *positifs*, alors $\min(G) \geq 1$.
2. Si G n'a que des cycles *négatifs*, alors $\max(G) \leq 1$.

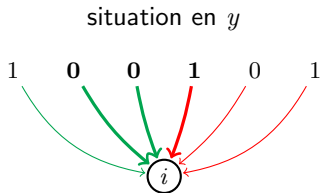
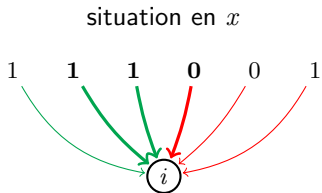
Soit G un graphe d'interaction fortement connexe.

3. Si G n'a que des cycles *positifs*, alors $\min(G) \geq 2$.
4. Si G n'a que des cycles *négatifs*, alors $\max(G) = 0$.

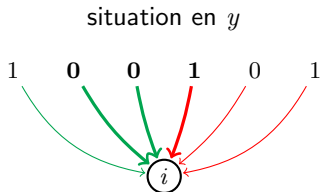
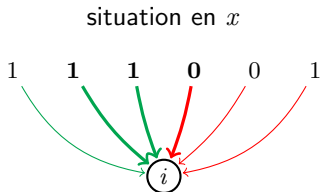
Corollary [Robert 1980]

Si G est acyclique, alors $\min(G) = \max(G) = 1$.

Question : peut-on comparer $f_i(x)$ et $f_i(y)$?



Question : peut-on comparer $f_i(x)$ et $f_i(y)$?



Réponse : oui ! On a $f_i(x) \geq f_i(y)$.

Preuve. Soit x et y deux points fixes distincts de f . Nous allons montrer que G possède un cycle positif. Pour tout i on pose $v_i := y_i - x_i$.

Preuve. Soit x et y deux points fixes distincts de f . Nous allons montrer que G possède un cycle positif. Pour tout i on pose $v_i := y_i - x_i$.

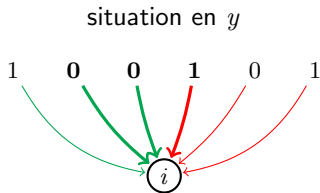
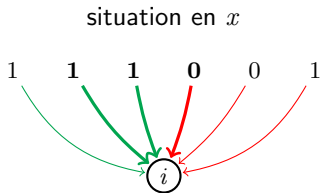
1. Supposons $x_i < y_i$ (cad $v_i = 1$).

$$\left. \begin{array}{l} x_j \geq y_j \text{ pour tout } j \rightarrow i \\ x_j \leq y_j \text{ pour tout } j \rightarrow i \end{array} \right\} \Rightarrow f_i(x) \geq f_i(y) \Rightarrow x_i \geq y_i \Rightarrow \langle \rangle$$

Preuve. Soit x et y deux points fixes distincts de f . Nous allons montrer que G possède un cycle positif. Pour tout i on pose $v_i := y_i - x_i$.

1. Supposons $x_i < y_i$ (cad $v_i = 1$).

$$\left. \begin{array}{l} x_j \geq y_j \text{ pour tout } j \rightarrow i \\ x_j \leq y_j \text{ pour tout } j \rightarrow i \end{array} \right\} \Rightarrow f_i(x) \geq f_i(y) \Rightarrow x_i \geq y_i \Rightarrow \langle \rangle$$



$$f_i(x) \geq f_i(y)$$

Preuve. Soit x et y deux points fixes distincts de f . Nous allons montrer que G possède un cycle positif. Pour tout i on pose $v_i := y_i - x_i$.

1. Supposons $x_i < y_i$ (cad $v_i = 1$).

$$\left. \begin{array}{l} x_j \geq y_j \text{ pour tout } j \rightarrow i \\ x_j \leq y_j \text{ pour tout } j \rightarrow i \end{array} \right\} \Rightarrow f_i(x) \geq f_i(y) \Rightarrow x_i \geq y_i \Rightarrow \langle \rangle$$

Donc il existe $j \rightarrow i$ tel que $x_j < y_j$ ou $j \rightarrow i$ tel que $x_j > y_j$.

Preuve. Soit x et y deux points fixes distincts de f . Nous allons montrer que G possède un cycle positif. Pour tout i on pose $v_i := y_i - x_i$.

1. Supposons $x_i < y_i$ (cad $v_i = 1$).

$$\left. \begin{array}{l} x_j \geq y_j \text{ pour tout } j \rightarrow i \\ x_j \leq y_j \text{ pour tout } j \rightarrow i \end{array} \right\} \Rightarrow f_i(x) \geq f_i(y) \Rightarrow x_i \geq y_i \Rightarrow \langle \rangle$$

Donc il existe $j \rightarrow i$ tel que $x_j < y_j$ ou $j \rightarrow i$ tel que $x_j > y_j$.

Donc il existe $j \rightarrow i$ de signe $v_j v_i$.

Preuve. Soit x et y deux points fixes distincts de f . Nous allons montrer que G possède un cycle positif. Pour tout i on pose $v_i := y_i - x_i$.

1. Supposons $x_i < y_i$ (cad $v_i = 1$).

$$\left. \begin{array}{l} x_j \geq y_j \text{ pour tout } j \rightarrow i \\ x_j \leq y_j \text{ pour tout } j \rightarrow i \end{array} \right\} \Rightarrow f_i(x) \geq f_i(y) \Rightarrow x_i \geq y_i \Rightarrow \langle \rangle$$

Donc il existe $j \rightarrow i$ tel que $x_j < y_j$ ou $j \rightarrow i$ tel que $x_j > y_j$.

Donc il existe $j \rightarrow i$ de signe $v_j v_i$.

2. Si $x_i > y_i$ il existe de même $j \rightarrow i$ de signe $v_j v_i$.

Preuve. Soit x et y deux points fixes distincts de f . Nous allons montrer que G possède un cycle positif. Pour tout i on pose $v_i := y_i - x_i$.

1. Supposons $x_i < y_i$ (cad $v_i = 1$).

$$\left. \begin{array}{l} x_j \geq y_j \text{ pour tout } j \rightarrow i \\ x_j \leq y_j \text{ pour tout } j \rightarrow i \end{array} \right\} \Rightarrow f_i(x) \geq f_i(y) \Rightarrow x_i \geq y_i \Rightarrow \langle \rangle$$

Donc il existe $j \rightarrow i$ tel que $x_j < y_j$ ou $j \rightarrow i$ tel que $x_j > y_j$.

Donc il existe $j \rightarrow i$ de signe $v_j v_i$.

2. Si $x_i > y_i$ il existe de même $j \rightarrow i$ de signe $v_j v_i$.

3. Il existe un cycle $i_0 i_1 i_2 \dots i_\ell i_0$ où le signe de $i_k \rightarrow i_{k+1}$ est $v_{i_k} v_{i_{k+1}}$.

Preuve. Soit x et y deux points fixes distincts de f . Nous allons montrer que G possède un cycle positif. Pour tout i on pose $v_i := y_i - x_i$.

1. Supposons $x_i < y_i$ (cad $v_i = 1$).

$$\left. \begin{array}{l} x_j \geq y_j \text{ pour tout } j \rightarrow i \\ x_j \leq y_j \text{ pour tout } j \rightarrow i \end{array} \right\} \Rightarrow f_i(x) \geq f_i(y) \Rightarrow x_i \geq y_i \Rightarrow \langle \rangle$$

Donc il existe $j \rightarrow i$ tel que $x_j < y_j$ ou $j \rightarrow i$ tel que $x_j > y_j$.

Donc il existe $j \rightarrow i$ de signe $v_j v_i$.

2. Si $x_i > y_i$ il existe de même $j \rightarrow i$ de signe $v_j v_i$.

3. Il existe un cycle $i_0 i_1 i_2 \dots i_\ell i_0$ où le signe de $i_k \rightarrow i_{k+1}$ est $v_{i_k} v_{i_{k+1}}$.

4. Le signe S de ce cycle est $S = v_0 v_1 \cdot v_1 v_2 \cdot v_2 v_3 \cdot \dots \cdot v_\ell v_0 = 1$.

Théorème [Aracena, 2008]

Soit G un graphe d'interaction.

1. *Si G n'a que des cycles **positifs**, alors $\min(G) \geq 1$.*
2. **Si G n'a que des cycles **négatifs**, alors $\max(G) \leq 1$.**

Soit G un graphe d'interaction fortement connexe.

3. *Si G n'a que des cycles **positifs**, alors $\min(G) \geq 2$.*
4. *Si G n'a que des cycles **négatifs**, alors $\max(G) = 0$.*

Théorème [Aracena, 2008]

Soit G un graphe d'interaction.

1. Si G n'a que des cycles **positifs**, alors $\min(G) \geq 1$.
2. Si G n'a que des cycles **négatifs**, alors $\max(G) \leq 1$.

Soit G un graphe d'interaction fortement connexe.

3. Si G n'a que des cycles **positifs**, alors $\min(G) \geq 2$.
4. Si G n'a que des cycles **négatifs**, alors $\max(G) = 0$.

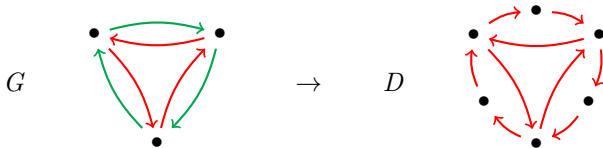
Pour tout $x, y \in \{0, 1\}^n$, on pose $\Delta(x, y) := \{i \in [n] : x_i \neq y_i\}$.

Lemme. Si x et y sont deux points fixes distincts de f , alors

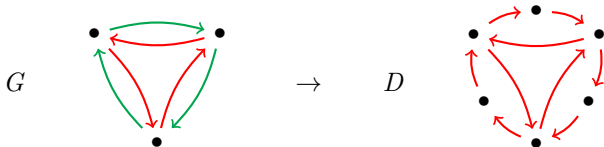
$G[\Delta(x, y)]$ a un cycle positif.

Question : Est-il difficile de décider si G a un cycle positif/négatif ?

Question : Est-il difficile de décider si G a un cycle positif/négatif?

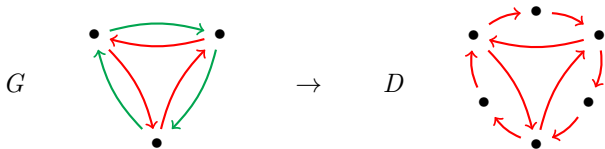


Question : Est-il difficile de décider si G a un cycle positif/négatif?



G a un cycle positif $\iff D$ a un cycle pair
 G a un cycle négatif $\iff D$ a un cycle impair
 $\iff D$ n'est pas bipartite

Question : Est-il difficile de décider si G a un cycle positif/négatif?

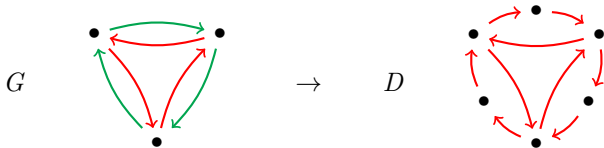


G a un cycle positif $\iff D$ a un cycle pair
 G a un cycle négatif $\iff D$ a un cycle impair
 $\iff D$ n'est pas bipartite $O(n^2)$

On peut décider en $O(n^2)$ si D est bipartite :

1. Réduction au composantes fortement connexes.
2. On prend un arbre-recouvrant $T \subseteq D$, et une 2-coloration c de T .
3. D est bipartite $\iff c$ est une coloration de D .

Question : Est-il difficile de décider si G a un cycle positif/négatif ?



G a un cycle positif $\iff D$ a un cycle pair $O(n^d)$
 G a un cycle négatif $\iff D$ a un cycle impair $O(n^2)$
 $\iff D$ n'est pas bipartite

Théorème [Robertson-Seymour-Thomas, 1999]

On peut décider si D a un cycle pair en temps polynomial.

Sommaire

1. Absence de cycle
2. Cycles positifs et négatifs
3. Absence de cycle d'un signe donné
4. **Borne du feedback positif**
5. Cliques positives et négatives
6. Le cas monotone
7. Conclusion

Nous avons vu que

$$G \text{ acyclique} \Rightarrow G \text{ sans cycle positif} \Rightarrow \max(G) \leq 1$$

Avons-nous quelque chose de la forme

G n'est pas trop "loin" d'être cyclique $\Rightarrow \max(G)$ n'est pas trop grand ?

Nous avons vu que

$$G \text{ acyclique} \Rightarrow G \text{ sans cycle positif} \Rightarrow \max(G) \leq 1$$

Avons-nous quelque chose de la forme

G n'est pas trop "loin" d'être cyclique $\Rightarrow \max(G)$ n'est pas trop grand ?

Comment définir une distance à l'acyclicité ?

Nous avons vu que

G acyclique $\Rightarrow G$ sans cycle positif $\Rightarrow \max(G) \leq 1$

Avons-nous quelque chose de la forme

G n'est pas trop "loin" d'être cyclique $\Rightarrow \max(G)$ n'est pas trop grand ?

Comment définir une distance à l'acyclicité ?

\hookrightarrow par le nb de cycles ?

\hookrightarrow par le nb min de sommets à supprimer
pour rendre le graphe acyclique ?

$\tau(G)$:= **nombre transversal**

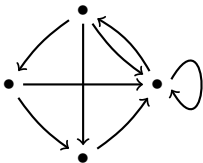
:= taille min d'un ensemble de sommets intersectant tous les cycles

:= minimum Feedback Vertex Set (FVS)

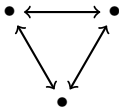
$\tau(G) :=$ **nombre transversal**

$:=$ taille min d'un ensemble de sommets intersectant tous les cycles

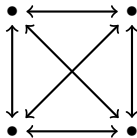
$:=$ minimum Feedback Vertex Set (FVS)



$\tau = 1$



$\tau = 2$



$\tau = 3$

$\tau(G)$:= **nombre transversal**

:= taille min d'un ensemble de sommets intersectant tous les cycles

:= minimum Feedback Vertex Set (FVS)

$\tau_p(G)$:= **nombre transversal positif**

:= taille min d'un ensemble de sommets intersectant tous les **cycles positifs**

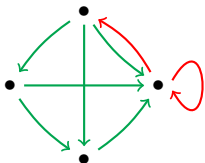
$\tau(G)$:= **nombre transversal**

:= taille min d'un ensemble de sommets intersectant tous les cycles

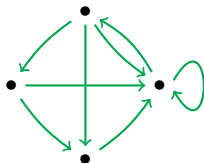
:= minimum Feedback Vertex Set (FVS)

$\tau_p(G)$:= **nombre transversal positif**

:= taille min d'un ensemble de sommets intersectant tous les **cycles positifs**



$$\tau = 1$$
$$\tau_p = 0$$



$$\tau = 1$$
$$\tau_p = 1$$

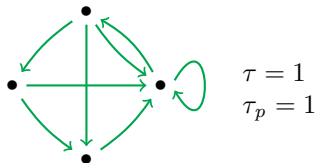
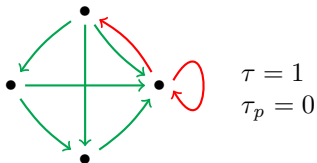
$\tau(G)$:= **nombre transversal**

:= taille min d'un ensemble de sommets intersectant tous les cycles

:= minimum Feedback Vertex Set (FVS)

$\tau_p(G)$:= **nombre transversal positif**

:= taille min d'un ensemble de sommets intersectant tous les **cycles positifs**



Remarque 1 $\tau_p \leq \tau$ (égalité lorsque tous les arcs sont positifs)

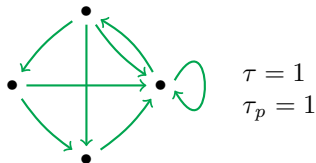
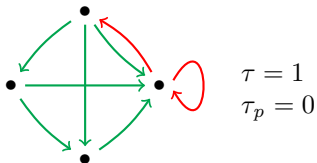
$\tau(G)$:= **nombre transversal**

:= taille min d'un ensemble de sommets intersectant tous les cycles

:= minimum Feedback Vertex Set (FVS)

$\tau_p(G)$:= **nombre transversal positif**

:= taille min d'un ensemble de sommets intersectant tous les **cycles positifs**



Remarque 1 $\tau_p \leq \tau$ (égalité lorsque tous les arcs sont positifs)

Remarque 2 τ et τ_p sont invariant par subdivisions des arcs

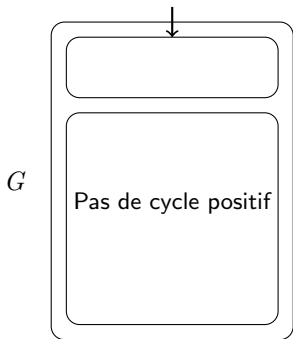
Borne du feedback positif [Aracena 2008]

$$\max(G) \leq 2^{\tau_p} \leq 2^{\tau}$$

Borne du feedback positif [Aracena 2008]

$$\max(G) \leq 2^{\tau_p} \leq 2^{\tau}$$

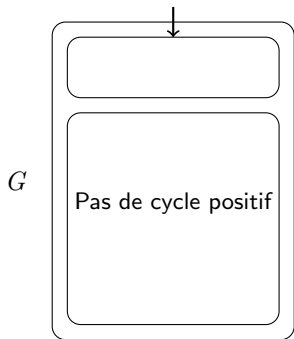
Positif FVS S de taille τ_p



Borne du feedback positif [Aracena 2008]

$$\max(G) \leq 2^{\tau_p} \leq 2^\tau$$

Positif FVS S de taille τ_p



Soit f un RB sur G .

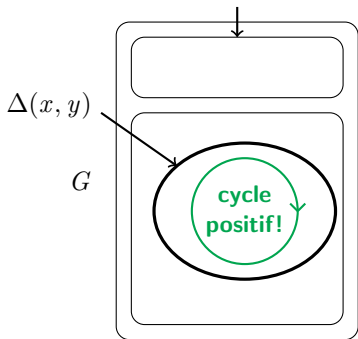
Soit A l'ensemble des points fixes.

Soit x et y deux points fixes distincts.

Borne du feedback positif [Aracena 2008]

$$\max(G) \leq 2^{\tau_p} \leq 2^\tau$$

Positif FVS S de taille τ_p



Soit f un RB sur G .

Soit A l'ensemble des points fixes.

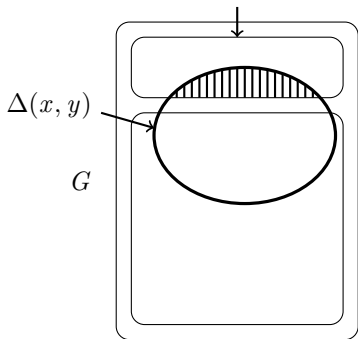
Soit x et y deux points fixes distincts.

- $G[\Delta(x, y)]$ a un cycle positif

Borne du feedback positif [Aracena 2008]

$$\max(G) \leq 2^{\tau_p} \leq 2^\tau$$

Positif FVS S de taille τ_p



Soit f un RB sur G .

Soit A l'ensemble des points fixes.

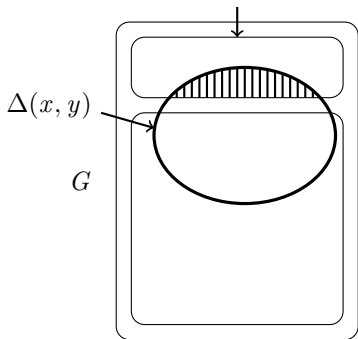
Soit x et y deux points fixes distincts.

- $G[\Delta(x, y)]$ a un cycle positif
- $\Delta(x, y)$ intersecte S , cad $x_S \neq y_S$

Borne du feedback positif [Aracena 2008]

$$\max(G) \leq 2^{\tau_p} \leq 2^\tau$$

Positif FVS S de taille τ_p



Soit f un RB sur G .

Soit A l'ensemble des points fixes.

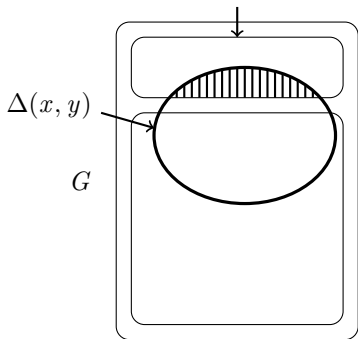
Soit x et y deux points fixes distincts.

- $G[\Delta(x, y)]$ a un cycle positif
- $\Delta(x, y)$ intersecte S , cad $x_S \neq y_S$
- $x \mapsto x_S$ est injective de A dans $\{0, 1\}^S$

Borne du feedback positif [Aracena 2008]

$$\max(G) \leq 2^{\tau_p} \leq 2^\tau$$

Positif FVS S de taille τ_p



Soit f un RB sur G .

Soit A l'ensemble des points fixes.

Soit x et y deux points fixes distincts.

- $G[\Delta(x, y)]$ a un cycle positif
- $\Delta(x, y)$ intersecte S , cad $x_S \neq y_S$
- $x \mapsto x_S$ est injective de A dans $\{0, 1\}^S$

Donc $|A| \leq |\{0, 1\}^S| = 2^{\tau_p}$

Borne du feedback positif [Aracena 2008]

$$\max(G) \leq 2^{\tau_p} \leq 2^\tau$$

Remarque G n'a pas de cycle positif $\Rightarrow \tau_p = 0 \Rightarrow \max(G) \leq 1$

Borne du feedback positif [Aracena 2008]

$$\max(G) \leq 2^{\tau_p} \leq 2^\tau$$

Remarque G n'a pas de cycle positif $\Rightarrow \tau_p = 0 \Rightarrow \max(G) \leq 1$

**C'est à peu près la seule borne sup sur $\max(G)$
qui dépend de la structure des cycle**

Pas de borne inf sur $\max(G)$!

Théorème [Aracena, 2008]

Soit G un graphe d'interaction.

1. Si G n'a que des cycles *positifs*, alors $\min(G) \geq 1$.
2. Si G n'a que des cycles *négatifs*, alors $\max(G) \leq 1$.
3. Plus généralement, $\max(G) \leq 2^{\tau_p}$.

Soit G un graphe d'interaction fortement connexe.

4. Si G n'a que des cycles *positifs*, alors $\min(G) \geq 2$.
5. Si G n'a que des cycles *négatifs*, alors $\max(G) = 0$.

Théorème [Aracena, 2008]

Soit G un graphe d'interaction.

1. Si G n'a que des cycles *positifs*, alors $\min(G) \geq 1$.
2. Si G n'a que des cycles *négatifs*, alors $\max(G) \leq 1$.
3. Plus généralement, $\max(G) \leq 2^{\tau_p}$.

Soit G un graphe d'interaction fortement connexe.

4. Si G n'a que des cycles *positifs*, alors $\min(G) \geq 2$.
5. Si G n'a que des cycles *négatifs*, alors $\max(G) = 0$.

Remarques

- Pas de borne inf. sur $\max(G)$.
- Très peu de résultat sur $\min(G)$.
- Très peu de résultat de complexité concernant $\min(G)$ et $\max(G)$.

Théorème [Aracena, 2008]

Soit G un graphe d'interaction.

1. Si G n'a que des cycles **positifs**, alors $\min(G) \geq 1$.
2. Si G n'a que des cycles **négatifs**, alors $\max(G) \leq 1$.
3. Plus généralement, $\max(G) \leq 2^{\tau_p}$.

Soit G un graphe d'interaction fortement connexe.

4. Si G n'a que des cycles **positifs**, alors $\min(G) \geq 2$.
5. Si G n'a que des cycles **négatifs**, alors $\max(G) = 0$.

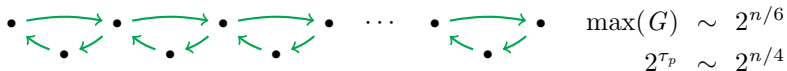
Remarques

- Pas de borne inf. sur $\max(G)$.
- Très peu de résultat sur $\min(G)$.
- Très peu de résultat de complexité concernant $\min(G)$ et $\max(G)$.

Théorème [Durbec-Perrot, 2018+]

On peut décider en temps polynomial si $\max(G) \geq 1$.

La borne 2^{τ_p} est très perfectible



$$\max(G) \sim 2^{n/6}$$

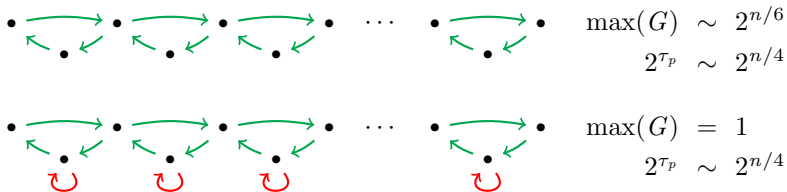
$$2^{\tau_p} \sim 2^{n/4}$$



$$\max(G) = 1$$

$$2^{\tau_p} \sim 2^{n/4}$$

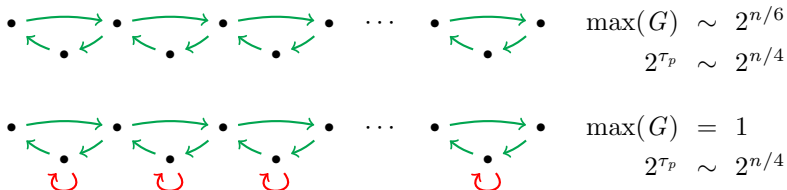
La borne 2^{τ_p} est **très perfectible**



Comment introduire les **cycles négatifs** dans la borne ?

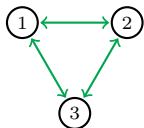
↪ Problème difficile : les cycles positifs sont **parfois défavorables**
 ... et **parfois favorables** à la présence de nombreux points fixes.

La borne 2^{τ_p} est très perfectible

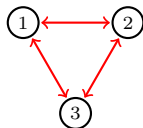


Comment introduire les **cycles négatifs** dans la borne ?

\hookrightarrow Problème difficile : les cycles positifs sont parfois défavorables
 ... et parfois favorables à la présence de nombreux points fixes.



$$\max(K_3^+) = 2$$



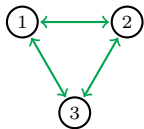
$$\max(K_3^-) = 3$$

Deux approches :

1. Fixer le graphe et faire varier les signes \rightarrow clique K_n .
2. Fixer les signes et faire varier le graphe \rightarrow tous les signes positifs.

Sommaire

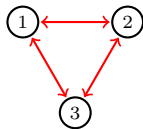
1. Absence de cycle
2. Cycles positifs et négatifs
3. Absence de cycle d'un signe donné
4. Borne du feedback positif
5. **Cliques positives et négatives**
6. Le cas monotone
7. Conclusion



8 réseaux possibles

$$\max(K_3^+) = 2$$

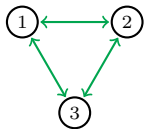
$$2^{\tau_p} = 2^2 = 4$$



8 réseaux possibles

$$\max(K_3^-) = 3$$

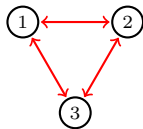
$$2^{\tau_p} = 2^2 = 4$$



8 réseaux possibles

$$\max(K_3^+) = 2$$

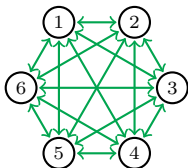
$$2^{\tau_p} = 2^2 = 4$$



8 réseaux possibles

$$\max(K_3^-) = 3$$

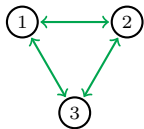
$$2^{\tau_p} = 2^2 = 4$$



$\sim 10^{41}$ réseaux possibles

$$4 \leq \max(K_6^+) \leq 16$$

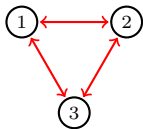
$$2^{\tau_p} = 2^5 = 32$$



8 réseaux possibles

$$\max(K_3^+) = 2$$

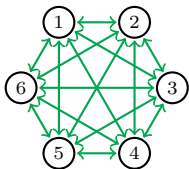
$$2^{\tau_p} = 2^2 = 4$$



8 réseaux possibles

$$\max(K_3^-) = 3$$

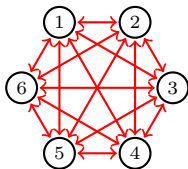
$$2^{\tau_p} = 2^2 = 4$$



$\sim 10^{41}$ réseaux possibles

$$4 \leq \max(K_6^+) \leq 16$$

$$2^{\tau_p} = 2^5 = 32$$



$\sim 10^{41}$ réseaux possibles

$$\max(K_6^-) = 20$$

$$2^{\tau_p} = 2^5 = 32$$

Definitions

1. La **distance de Hamming** entre deux configurations $x, y \in \{0, 1\}^n$ est

$$d_H(x, y) := \#\Delta(x, y) := \#\{i \in [n] : x_i \neq y_i\}.$$

Definitions

1. La **distance de Hamming** entre deux configurations $x, y \in \{0, 1\}^n$ est

$$d_H(x, y) := \#\Delta(x, y) := \#\{i \in [n] : x_i \neq y_i\}.$$

Exemple

$$\begin{array}{lcl} x & = & 00110011 \\ y & = & 11110000 \end{array} \quad d_H(x, y) = 4.$$

Definitions

1. La **distance de Hamming** entre deux configurations $x, y \in \{0, 1\}^n$ est

$$d_H(x, y) := \#\Delta(x, y) := \#\{i \in [n] : x_i \neq y_i\}.$$

2. On définit l'**ordre partiel** \leq sur $\{0, 1\}^n$ comme suit :

$$x \leq y \iff x_i \leq y_i \quad \forall i \in [n].$$

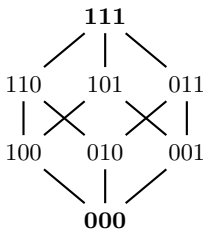
Definitions

1. La **distance de Hamming** entre deux configurations $x, y \in \{0, 1\}^n$ est

$$d_H(x, y) := \#\Delta(x, y) := \#\{i \in [n] : x_i \neq y_i\}.$$

2. On définit l'**ordre partiel** \leq sur $\{0, 1\}^n$ comme suit :

$$x \leq y \iff x_i \leq y_i \quad \forall i \in [n].$$



Definitions

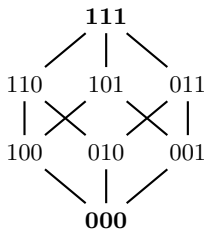
1. La **distance de Hamming** entre deux configurations $x, y \in \{0, 1\}^n$ est

$$d_H(x, y) := \#\Delta(x, y) := \#\{i \in [n] : x_i \neq y_i\}.$$

2. On définit l'**ordre partiel** \leq sur $\{0, 1\}^n$ comme suit :

$$x \leq y \iff x_i \leq y_i \quad \forall i \in [n].$$

3. Une **chaîne** est un ensemble de configs 2 à 2 comparables.



Definitions

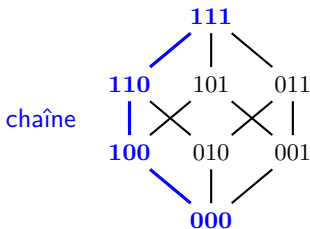
1. La **distance de Hamming** entre deux configurations $x, y \in \{0, 1\}^n$ est

$$d_H(x, y) := \#\Delta(x, y) := \#\{i \in [n] : x_i \neq y_i\}.$$

2. On définit l'**ordre partiel** \leq sur $\{0, 1\}^n$ comme suit :

$$x \leq y \iff x_i \leq y_i \forall i \in [n].$$

3. Une **chaîne** est un ensemble de configs 2 à 2 comparables.



Definitions

1. La **distance de Hamming** entre deux configurations $x, y \in \{0, 1\}^n$ est

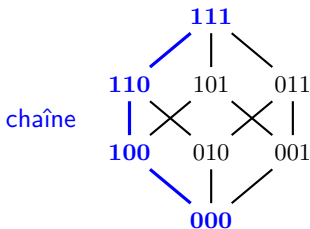
$$d_H(x, y) := \#\Delta(x, y) := \#\{i \in [n] : x_i \neq y_i\}.$$

2. On définit l'**ordre partiel** \leq sur $\{0, 1\}^n$ comme suit :

$$x \leq y \iff x_i \leq y_i \forall i \in [n].$$

3. Une **chaîne** est un ensemble de configs 2 à 2 comparables.

4. Une **antichaîne** est un ensemble de configs 2 à 2 incomparables.



Definitions

1. La **distance de Hamming** entre deux configurations $x, y \in \{0, 1\}^n$ est

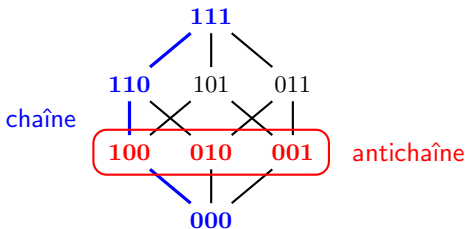
$$d_H(x, y) := \#\Delta(x, y) := \#\{i \in [n] : x_i \neq y_i\}.$$

2. On définit l'**ordre partiel** \leq sur $\{0, 1\}^n$ comme suit :

$$x \leq y \iff x_i \leq y_i \forall i \in [n].$$

3. Une **chaîne** est un ensemble de configs 2 à 2 comparables.

4. Une **antichaîne** est un ensemble de configs 2 à 2 incomparables.



Théorème [Gadouleau-R-Riis, 2015]

$$\frac{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{n} \leq \max(K_n^+) \leq \frac{2^{n+1}}{n+2} \leq \max(K_n^-) = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

Théorème [Gadouleau-R-Riis, 2015]

$$\frac{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{n} \leq \max(K_n^+) \leq \frac{2^{n+1}}{n+2} \leq \max(K_n^-) = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

Borne de Graham-Sloane

Borne de Varshamov

Lemme de Sperner

Théorème [Gadouleau-R-Riis, 2015]

$$\frac{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{n} \leq \max(K_n^+) \leq \frac{2^{n+1}}{n+2} \leq \max(K_n^-) = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

Borne de Graham-Sloane

Borne de Varshamov

Lemme de Sperner

Remarque : Dans les deux cas, la borne du feedback positif est 2^{n-1} , or

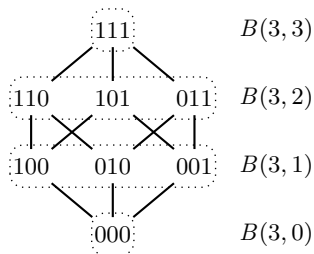
$$\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = O(2^{n-\log n}) = o(2^{n-1})$$

Théorème [Gadouleau-R-Riis, 2015]

$$\frac{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{n} \leq \max(K_n^+) \leq \frac{2^{n+1}}{n+2} \leq \max(K_n^-) = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

Borne inf pour la clique positive

Soit $B(n, k)$ les $x \in \{0, 1\}^n$ contenant k uns ; donc $|B(n, k)| = \binom{n}{k}$.



Théorème [Gadouleau-R-Riis, 2015]

$$\frac{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{n} \leq \max(K_n^+) \leq \frac{2^{n+1}}{n+2} \leq \max(K_n^-) = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

Borne inf pour la clique positive

Soit $B(n, k)$ les $x \in \{0, 1\}^n$ contenant k uns ; donc $|B(n, k)| = \binom{n}{k}$.

Soit $A \subseteq B(n, k)$ avec $d_H(x, y) \geq 4$ pour tout $x, y \in A$ distincts.

Théorème [Gadouleau-R-Riis, 2015]

$$\frac{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{n} \leq \max(K_n^+) \leq \frac{2^{n+1}}{n+2} \leq \max(K_n^-) = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

Borne inf pour la clique positive

Soit $B(n, k)$ les $x \in \{0, 1\}^n$ contenant k uns ; donc $|B(n, k)| = \binom{n}{k}$.

Soit $A \subseteq B(n, k)$ avec $d_H(x, y) \geq 4$ pour tout $x, y \in A$ distincts.

↪ Il y a un RB sur K_n^+ qui fixe A ; donc $\max(K_n^+) \geq |A|$.

Théorème [Gadouleau-R-Riis, 2015]

$$\frac{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{n} \leq \max(K_n^+) \leq \frac{2^{n+1}}{n+2} \leq \max(K_n^-) = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

Borne inf pour la clique positive

Soit $B(n, k)$ les $x \in \{0, 1\}^n$ contenant k uns ; donc $|B(n, k)| = \binom{n}{k}$.

Soit $A \subseteq B(n, k)$ avec $d_H(x, y) \geq 4$ pour tout $x, y \in A$ distincts.

\hookrightarrow Il y a un RB sur K_n^+ qui fixe A ; donc $\max(K_n^+) \geq |A|$.

Borne de Graham-Sloane [1980]

Il existe $A \subseteq B(n, k)$ tel que $d_H(x, y) \geq 4$ pour tout $x, y \in A$, $x \neq y$, et

$$|A| \geq \frac{\binom{n}{k}}{n}.$$

Théorème [Gadouleau-R-Riis, 2015]

$$\frac{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{n} \leq \max(K_n^+) \leq \frac{2^{n+1}}{n+2} \leq \max(K_n^-) = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

Borne sup pour la clique positive

Soit f un RB sur K_n^+ . Si x et y sont deux points fixes distincts de f , alors

$$d_{\max}(x, y) := \max(|\{i : x_i < y_i\}|, |\{i : x_i > y_i\}|) \geq 2.$$

Théorème [Gadouleau-R-Riis, 2015]

$$\frac{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{n} \leq \max(K_n^+) \leq \frac{2^{n+1}}{n+2} \leq \max(K_n^-) = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

Borne sup pour la clique positive

Soit f un RB sur K_n^+ . Si x et y sont deux points fixes distincts de f , alors

$$d_{\max}(x, y) := \max(|\{i : x_i < y_i\}|, |\{i : x_i > y_i\}|) \geq 2.$$

Borne de Varshamov [1965]

Si $A \subseteq \{0, 1\}^n$ et $d_{\max}(x, y) \geq 2$ pour tout $x, y \in A$ distincts, alors

$$|A| \leq \frac{2^{n+1}}{n+2}.$$

Théorème [Gadouleau-R-Riis, 2015]

$$\frac{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{n} \leq \max(K_n^+) \leq \frac{2^{n+1}}{n+2} \leq \max(K_n^-) = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

Égalité pour la clique négative

Soit f un RB sur K_n^- . On a $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.

Donc si x et y sont des points fixes, on a $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y) \Rightarrow x \geq y$.

Les PFs sont **incomparables** deux à deux : ils forment une **antichaîne**.

Théorème [Gadouleau-R-Riis, 2015]

$$\frac{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{n} \leq \max(K_n^+) \leq \frac{2^{n+1}}{n+2} \leq \max(K_n^-) = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

Égalité pour la clique négative

Soit f un RB sur K_n^- . On a $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.

Donc si x et y sont des points fixes, on a $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y) \Rightarrow x \geq y$.

Les PFs sont **incomparables** deux à deux : ils forment une **antichaîne**.

Lemme de Sperner [1928]

La taille maximum d'une antichaîne de $\{0, 1\}^n$ est $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

Théorème [Gadouleau-R-Riis, 2015]

$$\frac{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{n} \leq \max(K_n^+) \leq \frac{2^{n+1}}{n+2} \leq \max(K_n^-) = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

Égalité pour la clique négative

Soit f un RB sur K_n^- . On a $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.

Donc si x et y sont des points fixes, on a $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y) \Rightarrow x \geq y$.

Les PFs sont **incomparables** deux à deux : ils forment une **antichaîne**.

Lemme de Sperner [1928]

La taille maximum d'une antichaîne de $\{0, 1\}^n$ est $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

Donc $\max(K_n^-) \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, et la borne est atteinte par la "minorité stricte".

Théorème [Gadouleau-R-Riis, 2015]

$$\frac{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{n} \leq \max(K_n^+) \leq \frac{2^{n+1}}{n+2} \leq \max(K_n^-) = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

Égalité pour la clique négative

Soit f un RB sur K_n^- . On a $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.

Donc si x et y sont des points fixes, on a $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y) \Rightarrow x \geq y$.

Les PFs sont **incomparables** deux à deux : ils forment une **antichaîne**.

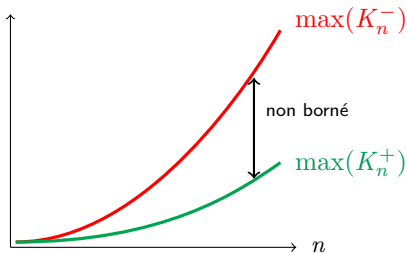
Lemme de Sperner [1928]

La taille maximum d'une antichaîne de $\{0, 1\}^n$ est $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

Donc $\max(K_n^-) \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, et la borne est atteinte par la "minorité stricte".

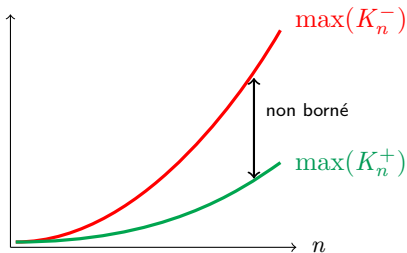
Théorème [Gadouleau-R-Riis, 2015]

$$\frac{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{n} \leq \max(K_n^+) \leq \frac{2^{n+1}}{n+2} \leq \max(K_n^-) = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$



Théorème [Gadouleau-R-Riis, 2015]

$$\frac{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{n} \leq \max(K_n^+) \leq \frac{2^{n+1}}{n+2} \leq \max(K_n^-) = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$



Corollaire. Pour tout k fixé, si n est suffisamment grand,

$$\max(K_n^-) > \max(K_{n+k}^+).$$

Théorème [Gadouleau-R-Riis, 2015]

$$\frac{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{n} \leq \max(K_n^+) \leq \frac{2^{n+1}}{n+2} \leq \max(K_n^-) = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

Conjecture

Si K_n^σ est un graphe signé sur K_n sans cycle nég. de long. deux, alors

$$\max(K_n^+) \leq \max(K_n^\sigma) \leq \max(K_n^-)$$

Deux approches :

1. Fixer le graphe et faire varier les signes \rightarrow clique K_n .
2. Fixer les signes et faire varier le graphe \rightarrow tous les signes positifs.

Sommaire

1. Absence de cycle
2. Cycles positifs et négatifs
3. Absence de cycle d'un signe donné
4. Borne du feedback positif
5. Cliques positives et négatives
6. **Le cas monotone**
7. Conclusion

1. Que se passe-t-il quand il n'y a **que des cycles positifs** ?

↔ Dans ce cas, $2^{\tau_p} = 2^{\tau}$

1. Que se passe-t-il quand il n'y a **que des cycles positifs** ?

↔ Dans ce cas, $2^{\tau_p} = 2^{\tau}$

2. Que se passe-t-il quand il n'y a **que des arcs positifs** ?

1. Que se passe-t-il quand il n'y a **que des cycles positifs** ?

↔ Dans ce cas, $2^{\tau_p} = 2^{\tau}$

2. Que se passe-t-il quand il n'y a **que des arcs positifs** ?

Proposition

1. *Supposons que G est fortement connexe et n'a que des cycles positifs. Soit G^+ obtenu à partir de G en rendant positif tous les arcs. Alors*

$$\max(G) = \max(G^+).$$

2. *De plus, tout réseau Booléen f sur G^+ est **monotone**, c'est-à-dire,*

$$\forall x, y \in \{0, 1\}^n \quad x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

Théorème [Knaster-Tarski, 1928]

Si f est monotone alors $\text{Fixe}(f)$ est un treillis non-vide

Théorème [Knaster-Tarski, 1928]

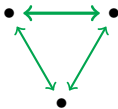
Si f est monotone alors $\text{Fixe}(f)$ est un treillis non-vide

$\nu(G) :=$ **“packing number”**
:= nombre maximum de cycles sommet-disjoints

Théorème [Knaster-Tarski, 1928]

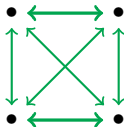
Si f est monotone alors $\text{Fixe}(f)$ est un treillis non-vide

$\nu(G)$:= **“packing number”**
:= nombre maximum de cycles sommet-disjoints



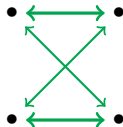
$$\nu = 1$$

$$\tau = 2$$



$$\nu = 2$$

$$\tau = 3$$



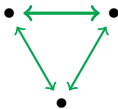
$$\nu = 2$$

$$\tau = 2$$

Théorème [Knaster-Tarski, 1928]

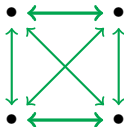
Si f est monotone alors $\text{Fixe}(f)$ est un treillis non-vide

$\nu(G)$:= "packing number"
:= nombre maximum de cycles sommet-disjoints



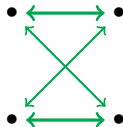
$$\nu = 1$$

$$\tau = 2$$



$$\nu = 2$$

$$\tau = 3$$



$$\nu = 2$$

$$\tau = 2$$

Remarque $\nu \leq \tau$

Théorème [Aracena-Salinas-R, 2017]

Si f est monotone, $\text{Fixe}(f)$ est iso. à un sous-ensemble $L \subseteq \{0, 1\}^\tau$ t.q.

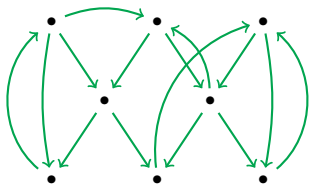
- 1. L est un treillis non-vide*
- 2. L n'a pas de chaîne de taille $\nu + 2$*

Théorème [Aracena-Salinas-R, 2017]

Si f est monotone, $\text{Fixe}(f)$ est iso. à un sous-ensemble $L \subseteq \{0, 1\}^\tau$ t.q.

1. L est un treillis non-vide
2. L n'a pas de chaîne de taille $\nu + 2$

Preuve de l'isomorphisme

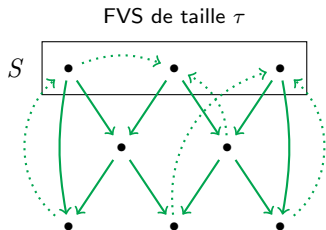


Théorème [Aracena-Salinas-R, 2017]

Si f est monotone, $\text{Fixe}(f)$ est iso. à un sous-ensemble $L \subseteq \{0, 1\}^\tau$ t.q.

1. L est un treillis non-vide
2. L n'a pas de chaîne de taille $\nu + 2$

Preuve de l'isomorphisme

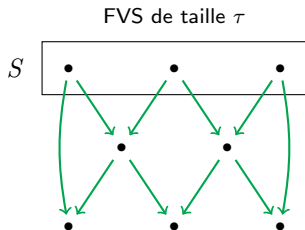


Théorème [Aracena-Salinas-R, 2017]

Si f est monotone, $\text{Fixe}(f)$ est iso. à un sous-ensemble $L \subseteq \{0, 1\}^\tau$ t.q.

1. L est un treillis non-vide
2. L n'a pas de chaîne de taille $\nu + 2$

Preuve de l'isomorphisme

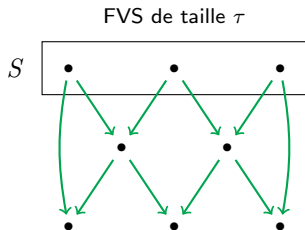


Théorème [Aracena-Salinas-R, 2017]

Si f est monotone, $\text{Fixe}(f)$ est iso. à un sous-ensemble $L \subseteq \{0, 1\}^\tau$ t.q.

1. L est un treillis non-vide
2. L n'a pas de chaîne de taille $\nu + 2$

Preuve de l'isomorphisme $\forall x, y \in \text{Fixe}(f) \quad x_S \leq y_S \iff x \leq y$



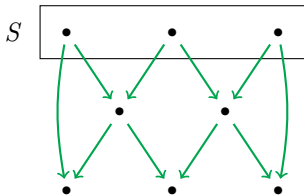
Théorème [Aracena-Salinas-R, 2017]

Si f est monotone, $\text{Fixe}(f)$ est iso. à un sous-ensemble $L \subseteq \{0, 1\}^\tau$ t.q.

1. L est un treillis non-vide
2. L n'a pas de chaîne de taille $\nu + 2$

Preuve de l'isomorphisme $\forall x, y \in \text{Fixe}(f) \quad x_S \leq y_S \iff x \leq y$

$\text{Fixe}(f)$ est iso à $L := \{x_S : x \in \text{Fixe}(f)\}$, et $L \subseteq \{0, 1\}^S$



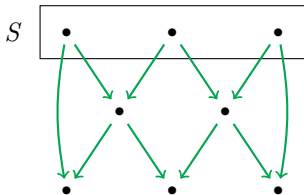
Théorème [Aracena-Salinas-R, 2017]

Si f est monotone, $\text{Fixe}(f)$ est iso. à un sous-ensemble $L \subseteq \{0, 1\}^\tau$ t.q.

1. L est un treillis non-vide
2. L n'a pas de chaîne de taille $\nu + 2$

Preuve de l'isomorphisme $\forall x, y \in \text{Fixe}(f) \quad x_S \leq y_S \implies x \leq y$

$\text{Fixe}(f)$ est iso à $L := \{x_S : x \in \text{Fixe}(f)\}$, et $L \subseteq \{0, 1\}^S$



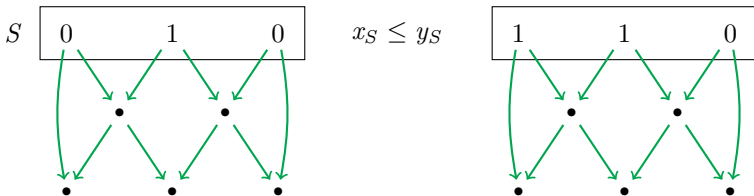
Théorème [Aracena-Salinas-R, 2017]

Si f est monotone, $\text{Fixe}(f)$ est iso. à un sous-ensemble $L \subseteq \{0, 1\}^\tau$ t.q.

1. L est un treillis non-vide
2. L n'a pas de chaîne de taille $\nu + 2$

Preuve de l'isomorphisme $\forall x, y \in \text{Fixe}(f) \quad x_S \leq y_S \implies x \leq y$

$\text{Fixe}(f)$ est iso à $L := \{x_S : x \in \text{Fixe}(f)\}$, et $L \subseteq \{0, 1\}^S$



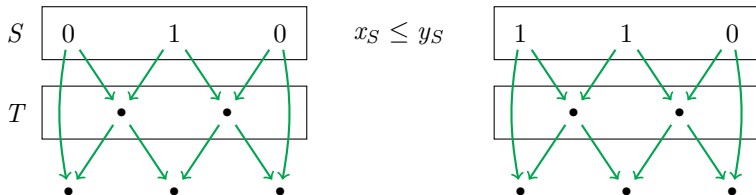
Théorème [Aracena-Salinas-R, 2017]

Si f est monotone, $\text{Fixe}(f)$ est iso. à un sous-ensemble $L \subseteq \{0, 1\}^\tau$ t.q.

1. L est un treillis non-vide
2. L n'a pas de chaîne de taille $\nu + 2$

Preuve de l'isomorphisme $\forall x, y \in \text{Fixe}(f) \quad x_S \leq y_S \implies x \leq y$

$\text{Fixe}(f)$ est iso à $L := \{x_S : x \in \text{Fixe}(f)\}$, et $L \subseteq \{0, 1\}^S$



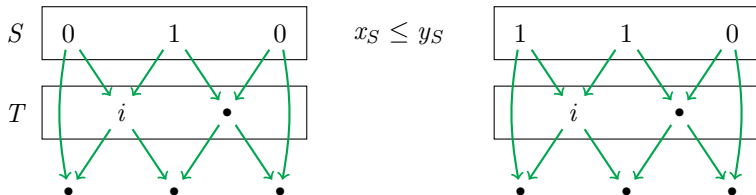
Théorème [Aracena-Salinas-R, 2017]

Si f est monotone, $\text{Fixe}(f)$ est iso. à un sous-ensemble $L \subseteq \{0, 1\}^\tau$ t.q.

1. L est un treillis non-vide
2. L n'a pas de chaîne de taille $\nu + 2$

Preuve de l'isomorphisme $\forall x, y \in \text{Fixe}(f) \quad x_S \leq y_S \implies x \leq y$

$\text{Fixe}(f)$ est iso à $L := \{x_S : x \in \text{Fixe}(f)\}$, et $L \subseteq \{0, 1\}^S$



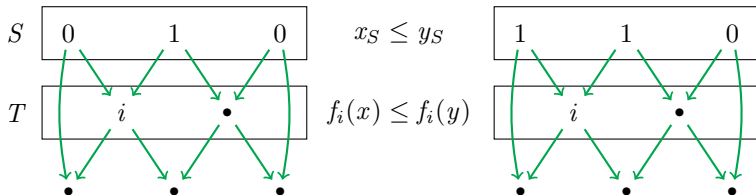
Théorème [Aracena-Salinas-R, 2017]

Si f est monotone, $\text{Fixe}(f)$ est iso. à un sous-ensemble $L \subseteq \{0, 1\}^\tau$ t.q.

1. L est un treillis non-vide
2. L n'a pas de chaîne de taille $\nu + 2$

Preuve de l'isomorphisme $\forall x, y \in \text{Fixe}(f) \quad x_S \leq y_S \implies x \leq y$

$\text{Fixe}(f)$ est iso à $L := \{x_S : x \in \text{Fixe}(f)\}$, et $L \subseteq \{0, 1\}^S$



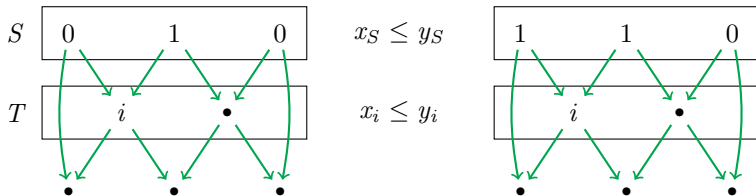
Théorème [Aracena-Salinas-R, 2017]

Si f est monotone, $\text{Fixe}(f)$ est iso. à un sous-ensemble $L \subseteq \{0, 1\}^\tau$ t.q.

1. L est un treillis non-vide
2. L n'a pas de chaîne de taille $\nu + 2$

Preuve de l'isomorphisme $\forall x, y \in \text{Fixe}(f) \quad x_S \leq y_S \implies x \leq y$

$\text{Fixe}(f)$ est iso à $L := \{x_S : x \in \text{Fixe}(f)\}$, et $L \subseteq \{0, 1\}^S$



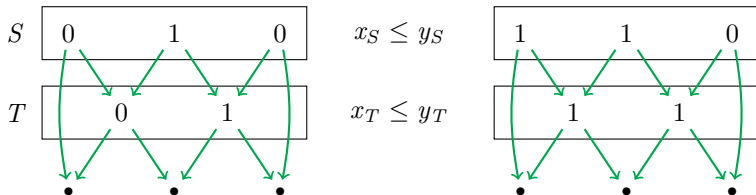
Théorème [Aracena-Salinas-R, 2017]

Si f est monotone, $\text{Fixe}(f)$ est iso. à un sous-ensemble $L \subseteq \{0, 1\}^\tau$ t.q.

1. L est un treillis non-vide
2. L n'a pas de chaîne de taille $\nu + 2$

Preuve de l'isomorphisme $\forall x, y \in \text{Fixe}(f) \quad x_S \leq y_S \implies x \leq y$

$\text{Fixe}(f)$ est iso à $L := \{x_S : x \in \text{Fixe}(f)\}$, et $L \subseteq \{0, 1\}^S$



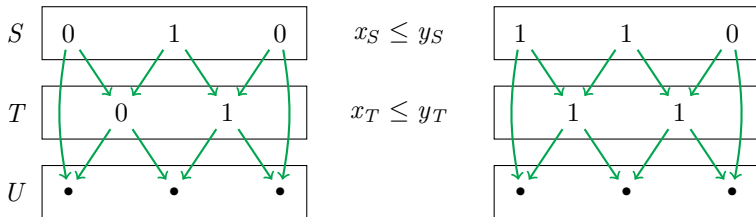
Théorème [Aracena-Salinas-R, 2017]

Si f est monotone, $\text{Fixe}(f)$ est iso. à un sous-ensemble $L \subseteq \{0, 1\}^\tau$ t.q.

1. L est un treillis non-vide
2. L n'a pas de chaîne de taille $\nu + 2$

Preuve de l'isomorphisme $\forall x, y \in \text{Fixe}(f) \quad x_S \leq y_S \implies x \leq y$

$\text{Fixe}(f)$ est iso à $L := \{x_S : x \in \text{Fixe}(f)\}$, et $L \subseteq \{0, 1\}^S$



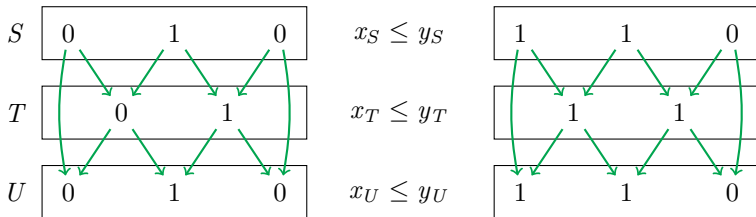
Théorème [Aracena-Salinas-R, 2017]

Si f est monotone, $\text{Fixe}(f)$ est iso. à un sous-ensemble $L \subseteq \{0, 1\}^\tau$ t.q.

1. L est un treillis non-vide
2. L n'a pas de chaîne de taille $\nu + 2$

Preuve de l'isomorphisme $\forall x, y \in \text{Fixe}(f) \quad x_S \leq y_S \implies x \leq y$

$\text{Fixe}(f)$ est iso à $L := \{x_S : x \in \text{Fixe}(f)\}$, et $L \subseteq \{0, 1\}^S$



Théorème [Aracena-Salinas-R, 2017]

Si f est monotone, $\text{Fixe}(f)$ est iso. à un sous-ensemble $L \subseteq \{0, 1\}^\tau$ t.q.

- 1. L est un treillis non-vide*
- 2. L n'a pas de chaîne de taille $\nu + 2$*

Preuve de 2 *Si $\text{Fixe}(f)$ a une chaîne de taille $k + 1$ alors $\nu \geq k$.*

Théorème [Aracena-Salinas-R, 2017]

Si f est monotone, $\text{Fixe}(f)$ est iso. à un sous-ensemble $L \subseteq \{0,1\}^\tau$ t.q.

- 1. L est un treillis non-vide*
- 2. L n'a pas de chaîne de taille $\nu + 2$*

Preuve de 2 *Si $\text{Fixe}(f)$ a une chaîne de taille $k + 1$ alors $\nu \geq k$.*

$$\begin{array}{l} x^5 = 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \\ x^4 = 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\ x^3 = 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\ x^2 = 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\ x^1 = 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \end{array}$$

Théorème [Aracena-Salinas-R, 2017]

Si f est monotone, $\text{Fixe}(f)$ est iso. à un sous-ensemble $L \subseteq \{0, 1\}^\tau$ t.q.

1. L est un treillis non-vide
2. L n'a pas de chaîne de taille $\nu + 2$

Preuve de 2 Si $\text{Fixe}(f)$ a une chaîne de taille $k + 1$ alors $\nu \geq k$.

$$\begin{array}{r}
 x^5 = 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \\
 x^4 = 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \\
 x^3 = 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \\
 x^2 = 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\
 x^1 = 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0
 \end{array}$$

$\Delta(x^1, x^2)$

$\Delta(x^2, x^3)$

$\Delta(x^3, x^4)$

$\Delta(x^4, x^5)$

Théorème [Aracena-Salinas-R, 2017]

Si f est monotone, $\text{Fixe}(f)$ est iso. à un sous-ensemble $L \subseteq \{0,1\}^\tau$ t.q.

1. L est un treillis non-vide
2. L n'a pas de chaîne de taille $\nu + 2$

Preuve de 2 Si $\text{Fixe}(f)$ a une chaîne de taille $k + 1$ alors $\nu \geq k$.

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 x^5 = & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 x^4 = & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 x^3 = & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 x^2 = & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 x^1 = & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 & \underbrace{\hspace{4em}} & \underbrace{\hspace{4em}} & \underbrace{\hspace{4em}} & \underbrace{\hspace{4em}} & & & & & & & & & & & & & & \\
 & \Delta(x^1, x^2) & \Delta(x^2, x^3) & \Delta(x^3, x^4) & \Delta(x^4, x^5) & & & & & & & & & & & & & & \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & & & & & & & & & & & & \\
 & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & & & & & & & & & & & & & &
 \end{array}$$

Théorème [Aracena-Salinas-R, 2017]

Si f est monotone, $\text{Fixe}(f)$ est iso. à un sous-ensemble $L \subseteq \{0,1\}^\tau$ t.q.

1. L est un treillis non-vide
2. L n'a pas de chaîne de taille $\nu + 2$

Preuve de 2 Si $\text{Fixe}(f)$ a une chaîne de taille $k + 1$ alors $\nu \geq k$.

Donc $\text{Fixe}(f)$ n'a pas de chaîne de taille $\nu + 2$, et L aussi.

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 x^5 = & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 x^4 = & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 x^3 = & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 x^2 = & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 x^1 = & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

$\Delta(x^1, x^2)$
 \downarrow
 C_1

$\Delta(x^2, x^3)$
 \downarrow
 C_2

$\Delta(x^3, x^4)$
 \downarrow
 C_3

$\Delta(x^4, x^5)$
 \downarrow
 C_4

Théorème [Erdős, 1945]

Si $A \subseteq \{0, 1\}^n$ n'a pas de chaîne de taille $\ell + 1$ alors

$$|A| \leq \text{la somme des } \ell \text{ plus grands coefficients } \binom{n}{k}$$

Théorème [Erdős, 1945]

Si $A \subseteq \{0, 1\}^n$ n'a pas de chaîne de taille $\ell + 1$ alors

$$|A| \leq \text{la somme des } \ell \text{ plus grands coefficients } \binom{n}{k}$$

Remarque Le cas $\ell = 1$ est le lemme de Sperner sur les antichaînes

Théorème [Erdős, 1945]

Si $A \subseteq \{0, 1\}^n$ n'a pas de chaîne de taille $\ell + 1$ alors

$$|A| \leq \text{la somme des } \ell \text{ plus grands coefficients } \binom{n}{k}$$

Corollaire *Si f est monotone alors*

$$|\text{Fixe}(f)| - 2 \leq \text{somme des } \nu - 1 \text{ plus grands coefficients } \binom{\tau}{k}$$

Théorème [Erdős, 1945]

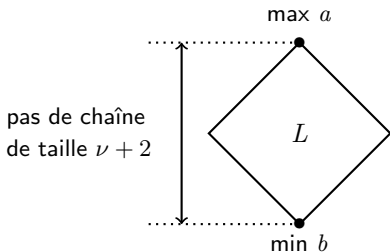
Si $A \subseteq \{0, 1\}^n$ n'a pas de chaîne de taille $\ell + 1$ alors

$$|A| \leq \text{la somme des } \ell \text{ plus grands coefficients } \binom{n}{k}$$

Corollaire Si f est monotone alors

$$|\text{Fixe}(f)| - 2 \leq \text{somme des } \nu - 1 \text{ plus grands coefficients } \binom{\tau}{k}$$

Preuve Soit $L \subseteq \{0, 1\}^\tau$ un treillis non-vide isomorphe à $\text{Fixe}(f)$



Théorème [Erdős, 1945]

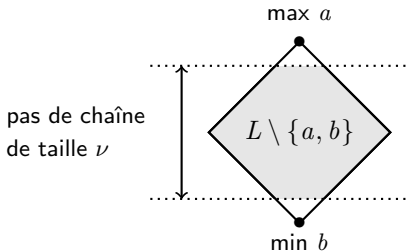
Si $A \subseteq \{0, 1\}^n$ n'a pas de chaîne de taille $\ell + 1$ alors

$$|A| \leq \text{la somme des } \ell \text{ plus grands coefficients } \binom{n}{k}$$

Corollaire Si f est monotone alors

$$|\text{Fixe}(f)| - 2 \leq \text{somme des } \nu - 1 \text{ plus grands coefficients } \binom{\tau}{k}$$

Preuve Soit $L \subseteq \{0, 1\}^\tau$ un treillis non-vide isomorphe à $\text{Fixe}(f)$



Théorème [Erdős, 1945]

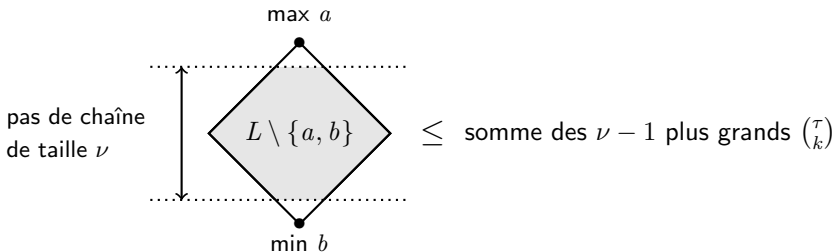
Si $A \subseteq \{0, 1\}^n$ n'a pas de chaîne de taille $\ell + 1$ alors

$$|A| \leq \text{la somme des } \ell \text{ plus grands coefficients } \binom{n}{k}$$

Corollaire Si f est monotone alors

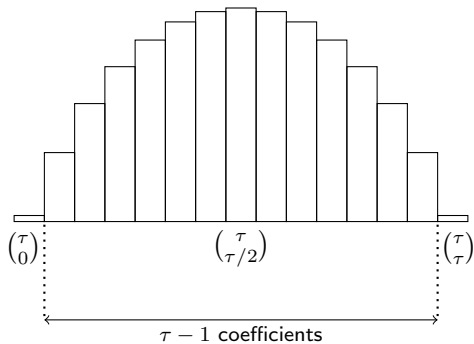
$$|\text{Fixe}(f)| - 2 \leq \text{somme des } \nu - 1 \text{ plus grands coefficients } \binom{\tau}{k}$$

Preuve Soit $L \subseteq \{0, 1\}^\tau$ un treillis non-vide isomorphe à $\text{Fixe}(f)$

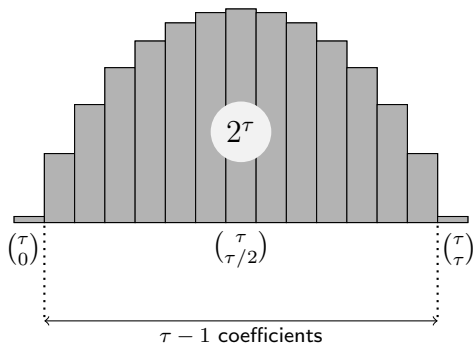


Corollaire $\max(G^+) \leq$ la somme des $\nu - 1$ plus grands $\binom{\tau}{k} + 2$

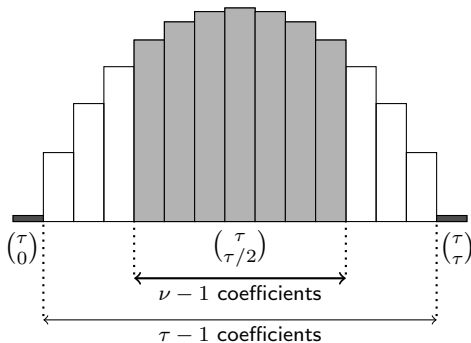
Corollaire $\max(G^+) \leq$ la somme des $\nu - 1$ plus grands $\binom{\tau}{k} + 2$



Corollaire $\max(G^+) \leq$ la somme des $\nu - 1$ plus grands $\binom{\tau}{k} + 2$



Corollaire $\max(G^+) \leq$ la somme des $\nu - 1$ plus grands $\binom{\tau}{k} + 2$



Corollaire $\max(G^+) = 2^\tau \Rightarrow \nu = \tau$

Corollaire $\max(G^+) \leq$ la somme des $\nu - 1$ plus grands $\binom{\tau}{k} + 2$

La borne est intéressante quand ν est bien plus petit que τ

Le plus grand écart connu est $\nu \log \nu \leq 30\tau$ [Alon-Seymour 93]

Corollaire $\max(G^+) \leq$ la somme des $\nu - 1$ plus grands $\binom{\tau}{k} + 2$

La borne est intéressante quand ν est bien plus petit que τ

Le plus grand écart connu est $\nu \log \nu \leq 30\tau$ [Alon-Seymour 93]

Pour ν fixé, τ ne peut pas être arbitrairement grand...

Corollaire $\max(G^+) \leq$ la somme des $\nu - 1$ plus grands $\binom{\tau}{k} + 2$

La borne est intéressante quand ν est bien plus petit que τ

Le plus grand écart connu est $\nu \log \nu \leq 30\tau$ [Alon-Seymour 93]

Pour ν fixé, τ ne peut pas être arbitrairement grand...

Théorème [Reed-Robertson-Seymour-Thomas, 1995]

Il existe $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que, pour tout graphe dirigé G ,

$$\tau \leq h(\nu)$$

La borne $h(\nu)$ est astronomique (utilisation itérée du thm de Ramsey)

Corollaire $\max(G^+) \leq$ la somme des $\nu - 1$ plus grands $\binom{\tau}{k} + 2$

La borne est intéressante quand ν est bien plus petit que τ

Le plus grand écart connu est $\nu \log \nu \leq 30\tau$ [Alon-Seymour 93]

Pour ν fixé, τ ne peut pas être arbitrairement grand...

Théorème [Reed-Robertson-Seymour-Thomas, 1995]

Il existe $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que, pour tout graphe dirigé G ,

$$\tau \leq h(\nu)$$

La borne $h(\nu)$ est astronomique (utilisation itérée du thm de Ramsey)

Corollaire $\max(G) \leq 2^{\tau_p} \leq 2^\tau \leq 2^{h(\nu)}$

Corollaire $\max(G^+) \leq$ la somme des $\nu - 1$ plus grands $\binom{\tau}{k} + 2$

La borne est intéressante quand ν est bien plus petit que τ

Le plus grand écart connu est $\nu \log \nu \leq 30\tau$ [Alon-Seymour 93]

Pour ν fixé, τ ne peut pas être arbitrairement grand...

Théorème [Reed-Robertson-Seymour-Thomas, 1995]

Il existe $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que, pour tout graphe dirigé G ,

$$\tau \leq h(\nu)$$

La borne $h(\nu)$ est astronomique (utilisation itérée du thm de Ramsey)

Corollaire $\max(G) \leq 2^{\tau_p} \leq 2^\tau \leq 2^{h(\nu)}$

Conjecture $\max(G) \leq 2^{O(\nu \log \nu)}$

Sommaire

1. Absence de cycle
2. Cycles positifs et négatifs
3. Absence de cycle d'un signe donné
4. Borne du feedback positif
5. Cliques positives et négatives
6. Le cas monotone
7. **Conclusion**

1. **Les RBs sont des modèles classiques pour les systèmes complexes** : faciles à définir, mais dynamiques riches.

1. **Les RBs sont des modèles classiques pour les systèmes complexes** : faciles à définir, mais dynamiques riches.
2. **Question centrale** : que peut-on dire sur la dynamique d'un RB f à partir de son graphe d'interaction G ?

1. **Les RBs sont des modèles classiques pour les systèmes complexes** : faciles à définir, mais dynamiques riches.
2. **Question centrale** : que peut-on dire sur la dynamique d'un RB f à partir de son graphe d'interaction G ?
3. **Étude des points fixes**, à travers $\min(G)$ et $\max(G)$.

1. **Les RBs sont des modèles classiques pour les systèmes complexes** : faciles à définir, mais dynamiques riches.
2. **Question centrale** : que peut-on dire sur la dynamique d'un RB f à partir de son graphe d'interaction G ?
3. **Étude des points fixes**, à travers $\min(G)$ et $\max(G)$.
↪ Bornes supérieures sur $\max(G)$ intéressantes !

Théorie des graphes

Cycles paires/impaires
Propriétés d'Erdős-Pósa

Théorie des ensemble

Lemme de Sperner
Extension d'Erdős
Théorème de Tarski

Théorie des codes

Borne de Graham-Sloane
Borne de Varshamov

1. **Les RBs sont des modèles classiques pour les systèmes complexes** : faciles à définir, mais dynamiques riches.
2. **Question centrale** : que peut-on dire sur la dynamique d'un RB f à partir de son graphe d'interaction G ?
3. **Étude des points fixes**, à travers $\min(G)$ et $\max(G)$.
 - ↪ Bornes supérieures sur $\max(G)$ intéressantes !
 - ↪ Pas de borne inf sur $\max(G)$.

1. **Les RBs sont des modèles classiques pour les systèmes complexes** : faciles à définir, mais dynamiques riches.
2. **Question centrale** : que peut-on dire sur la dynamique d'un RB f à partir de son graphe d'interaction G ?
3. **Étude des points fixes**, à travers $\min(G)$ et $\max(G)$.
 - ↪ Bornes supérieures sur $\max(G)$ intéressantes !
 - ↪ Pas de borne inf sur $\max(G)$.
 - ↪ Peu de résultat sur $\min(G)$.

1. **Les RBs sont des modèles classiques pour les systèmes complexes** : faciles à définir, mais dynamiques riches.
2. **Question centrale** : que peut-on dire sur la dynamique d'un RB f à partir de son graphe d'interaction G ?
3. **Étude des points fixes**, à travers $\min(G)$ et $\max(G)$.
 - ↪ Bornes supérieures sur $\max(G)$ intéressantes !
 - ↪ Pas de borne inf sur $\max(G)$.
 - ↪ Peu de résultat sur $\min(G)$.
 - ↪ Peu de résultat de complexité.

1. **Les RBs sont des modèles classiques pour les systèmes complexes** : faciles à définir, mais dynamiques riches.
2. **Question centrale** : que peut-on dire sur la dynamique d'un RB f à partir de son graphe d'interaction G ?
3. **Étude des points fixes**, à travers $\min(G)$ et $\max(G)$.
 - ↪ Bornes supérieures sur $\max(G)$ intéressantes !
 - ↪ Pas de borne inf sur $\max(G)$.
 - ↪ Peu de résultat sur $\min(G)$.
 - ↪ Peu de résultat de complexité.
 - ↪ **Cycles positifs** assez bien compris.

1. **Les RBs sont des modèles classiques pour les systèmes complexes** : faciles à définir, mais dynamiques riches.
2. **Question centrale** : que peut-on dire sur la dynamique d'un RB f à partir de son graphe d'interaction G ?
3. **Étude des points fixes**, à travers $\min(G)$ et $\max(G)$.
 - ↪ Bornes supérieures sur $\max(G)$ intéressantes !
 - ↪ Pas de borne inf sur $\max(G)$.
 - ↪ Peu de résultat sur $\min(G)$.
 - ↪ Peu de résultat de complexité.
 - ↪ **Cycles positifs** assez bien compris.

Conjecture : Il est possible de borner $\max(G)$ en fonction du nombre maximum de cycles positifs disjoints dans G .

1. **Les RBs sont des modèles classiques pour les systèmes complexes** : faciles à définir, mais dynamiques riches.
2. **Question centrale** : que peut-on dire sur la dynamique d'un RB f à partir de son graphe d'interaction G ?
3. **Étude des points fixes**, à travers $\min(G)$ et $\max(G)$.
 - ↪ Bornes supérieures sur $\max(G)$ intéressantes !
 - ↪ Pas de borne inf sur $\max(G)$.
 - ↪ Peu de résultat sur $\min(G)$.
 - ↪ Peu de résultat de complexité.
 - ↪ **Cycles positifs** assez bien compris.
 - ↪ **Cycles négatifs** beaucoup moins bien compris.

1. **Les RBs sont des modèles classiques pour les systèmes complexes** : faciles à définir, mais dynamiques riches.
 2. **Question centrale** : que peut-on dire sur la dynamique d'un RB f à partir de son graphe d'interaction G ?
 3. **Étude des points fixes**, à travers $\min(G)$ et $\max(G)$.
 - ↪ Bornes supérieures sur $\max(G)$ intéressantes !
 - ↪ Pas de borne inf sur $\max(G)$.
 - ↪ Peu de résultat sur $\min(G)$.
 - ↪ Peu de résultat de complexité.
 - ↪ **Cycles positifs** assez bien compris.
 - ↪ **Cycles négatifs** beaucoup moins bien compris.
3. **BEAUCOUP d'autres propriétés dynamiques à étudier.**

1. **Les RBs sont des modèles classiques pour les systèmes complexes** : faciles à définir, mais dynamiques riches.
2. **Question centrale** : que peut-on dire sur la dynamique d'un RB f à partir de son graphe d'interaction G ?
3. **Étude des points fixes**, à travers $\min(G)$ et $\max(G)$.
 - ↪ Bornes supérieures sur $\max(G)$ intéressantes !
 - ↪ Pas de borne inf sur $\max(G)$.
 - ↪ Peu de résultat sur $\min(G)$.
 - ↪ Peu de résultat de complexité.
 - ↪ **Cycles positifs** assez bien compris.
 - ↪ **Cycles négatifs** beaucoup moins bien compris.
3. **BEAUCOUP d'autres propriétés dynamiques à étudier.**
 - ↪ Nombre de points périodiques, de cycles limites.

1. **Les RBs sont des modèles classiques pour les systèmes complexes** : faciles à définir, mais dynamiques riches.
2. **Question centrale** : que peut-on dire sur la dynamique d'un RB f à partir de son graphe d'interaction G ?
3. **Étude des points fixes**, à travers $\min(G)$ et $\max(G)$.
 - ↪ Bornes supérieures sur $\max(G)$ intéressantes !
 - ↪ Pas de borne inf sur $\max(G)$.
 - ↪ Peu de résultat sur $\min(G)$.
 - ↪ Peu de résultat de complexité.
 - ↪ **Cycles positifs** assez bien compris.
 - ↪ **Cycles négatifs** beaucoup moins bien compris.
3. **BEAUCOUP d'autres propriétés dynamiques à étudier.**
 - ↪ Nombre de points périodiques, de cycles limites.
 - ↪ Longueur des cycles limites et des transitoires.

1. **Les RBs sont des modèles classiques pour les systèmes complexes** : faciles à définir, mais dynamiques riches.
2. **Question centrale** : que peut-on dire sur la dynamique d'un RB f à partir de son graphe d'interaction G ?
3. **Étude des points fixes**, à travers $\min(G)$ et $\max(G)$.
 - ↪ Bornes supérieures sur $\max(G)$ intéressantes !
 - ↪ Pas de borne inf sur $\max(G)$.
 - ↪ Peu de résultat sur $\min(G)$.
 - ↪ Peu de résultat de complexité.
 - ↪ **Cycles positifs** assez bien compris.
 - ↪ **Cycles négatifs** beaucoup moins bien compris.
3. **BEAUCOUP d'autres propriétés dynamiques à étudier.**
 - ↪ Nombre de points périodiques, de cycles limites.
 - ↪ Longueur des cycles limites et des transitoires.
 - ↪ Atteignabilité → **Partie 2**

Merci !