

# Algorithmique – Programmation Objet – Python

## TD n°5

Licence Informatique 2ème année  
Université de Nice-Sophia Antipolis

L'élimination de Gauss-Jordan, aussi appelée méthode du pivot de Gauss, est un algorithme de l'algèbre linéaire pour déterminer les solutions d'un système de  $n$  équations linéaires en  $n$  variables inconnues. Pour ce faire, on construit une matrice contenant, pour chaque ligne, les coefficients des  $n$  variables, outre au terme connu, de l'équation correspondante. La méthode consiste à produire la forme échelonnée réduite de cette matrice à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes. Trois types d'opérations élémentaires sont utilisées:

- Échange de deux lignes ;
- Multiplication d'une ligne par un scalaire non nul ;
- Ajout du multiple d'une ligne à une autre ligne.

### 1 Une classe “système d'équations”

Concevoir une classe `SYSTEMEEQUATIONS` pour représenter un système d'équations linéaires. La classe devra contenir, comme attribut, une matrice  $n \times (n + 1)$  des coefficients du système d'équations, que nous appellerons  $A$ .

### 2 Préparations

1. Écrire la méthode `ÉCHANGE( $i, j$ )` qui échange la ligne  $a_i$  avec la ligne  $a_j$ .
2. Écrire la méthode `PRODSCALAIRE( $i, x$ )` qui multiplie la ligne  $a_i$  par le scalaire  $x \neq 0$ .
3. Écrire la méthode `COMBLIN( $i, j, x$ )`, qui ajoute un multiple de la ligne  $a_i$  à la ligne  $a_j$ , utilisant  $x$  comme facteur de multiplication.

### 3 Résolution du système

Un système de  $n$  équations linéaires en  $n$  variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$  a la forme générale

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}, \quad (1)$$

où  $a_{ij}$  est le coefficient de  $x_j$  dans l' $i$ ème équation et les  $b_i$  sont les termes connus.

On va maintenant écrire une version simplifiée de l'élimination de Gauss-Jordan. Si on multiplie les deux membres d'une équation par la même constante, ses solutions ne changent pas ; en outre, additionner ou soustraire membre par membre une équation du système à une autre laisse les solutions du système invariées. L'objectif de ces manipulations est de transformer le système de l'Équation 1 en un système équivalent de la forme

$$\begin{cases} x_1 & & & = \bar{b}_1 \\ & x_2 & & = \bar{b}_2 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & x_n = \bar{b}_n \end{cases}, \quad (2)$$

dans lequel il est facile de lire la solution pour chaque variable.

Écrire la méthode `RÉSOUTRE()` qui transforme la matrice  $A$  des coefficients en sa forme échelonnée réduite correspondant au système de l'Équation 2, en utilisant les méthodes `PRODSCLAIRE` et `COMBLIN` développées dans l'exercice précédent.

### 4 Élimination de Gauss-Jordan

Pour améliorer la stabilité numérique de l'algorithme, il est conseillé d'échanger à chaque étape de transformation la ligne à manipuler avec la ligne ayant la valeur absolue de pivot ( $a_{ii}$ ) la plus grande. Modifier l'algorithme de l'exercice précédent pour suivre ce conseil.