

Estimer la croissance d'une population en fonction de ses caractéristiques

Mots clefs : Matrice de Leslie, équations aux différences, algèbre linéaire, simulation

Description du projet¹

Lorsque l'on cherche à estimer la croissance d'une population d'animaux, d'insectes, d'humains, on se retrouve confronté à différents choix : on considère la population en tenant compte de ses caractéristiques propres (age, stade d'évolution, taille.. que l'on appelle aussi 'variables de structuration') ou bien on considère la population dans son ensemble. Dans le premier cas, les taux de reproduction, de survie dépendront de la structuration que l'on aura choisi : une femme de 20 ans aura plus de chance d'avoir des enfants qu'une femme de 60 ans !

Ce type de modèle, structuré en classe d'âge, a été développé par Patrick H. Leslie dans les années 1940 et est largement utilisé dans de nombreux domaines de la biologie. C'est un modèle dit en temps discret, c'est à dire qu'on peut calculer la population au temps $t + 1$ en fonction de celle au temps précédent t (cette notion est exactement la même que les suites récurrentes étudiées au Lycée) dans lequel la population d'un seul sexe (féminin en général car source reproductrice.. désolé pour le genre masculin!) est divisée en différentes classes d'âges. Ce type de représentation est notamment très utile lorsqu'on se pose la question de la survie d'une population dans un environnement qui change (et influence donc les taux de reproduction et de survie).

Le but de ce projet est de bien comprendre la construction des modèles de type Leslie, de voir comment peut évoluer une population en fonction des paramètres que l'on choisit. Des simulations par des logiciels bien choisis (de type Scilab) seront utilisées et des théorèmes mathématiques émergeront de ces constations. Des applications à des populations d'insectes, de tortues de mer ou d'arbres soumis à des processus de contrôle ou de récolte termineront ce projet.

Première partie

1. Écriture matricielle du modèle de Leslie : un exemple avec trois classes d'âge. On suppose que l'on a le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned}x_1^{(k+1)} &= F_1 x_1^{(k)} + F_2 x_2^{(k)} + F_3 x_3^{(k)} \\x_2^{(k+1)} &= P_1 x_1^{(k)} \\x_3^{(k+1)} &= P_2 x_2^{(k)}\end{aligned}$$

où x_1 , x_2 , x_3 représentent les trois classes d'âge différentes au temps $t + 1$ ($x_i^{(k+1)}$) en fonction de celles au temps t ($x_i^{(k)}$). Bien comprendre et expliciter ce que représentent ces équations. Donner la signification biologique des termes F_1 , F_2 , F_3 , P_1 , P_2 . Pour ce faire effectuer quelques recherches bibliographiques et donner une représentation graphique de ce type de modèle.

Rechercher ce qu'est une matrice et ré-écrire alors le système précédent sous sa forme dite 'matricielle'. Généraliser à n classes d'âge.

¹Ce projet a été co-écrit avec Valérie Lemesle, CIRAD, valerie.lemesle@cirad.fr

2. ‘Dérrouler’ alors le modèle de Leslie de façon à obtenir $x^{(k)}$ défini comme le vecteur de l’ensemble des classes d’âges $(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$ en fonction de la population initiale $x^{(0)}$. Connaissant ainsi la population à son état initial, vous pourrez obtenir la valeur de la population à un temps quelconque.

Deuxième partie

1. Un premier exemple pour mieux comprendre : On observe pendant 6 ans trois classes d’âge (0-1 an, 1-2 ans, et 2 ans) d’une population de rongeurs ayant un cycle de reproduction de trois ans. On obtient les données suivantes :

Temps	0	1	2	3	4	5	6
0-1 an	30	800	290	2460	2470	7960	12330
1-2 ans	50	15	400	145	1230	1235	3980
2 ans	50	20	6	160	58	492	494

Que valent alors les coefficients P_1 et P_2 ? Seules les femelles d’âge > 1 an sont fécondes (*i.e.* $F_1 = 0$), trouver alors en résolvant un système à deux équations et deux inconnues F_2 et F_3 . Écrire le modèle de Leslie matriciel correspondant.

2. Faites une simulation de l’évolution de la croissance des trois classes d’âge sur 6 ans, puis sur 10 ans, 15 ans. Que remarquez vous ? Calculer alors le taux de croissance de chacune des classes d’âge à chaque temps ? Que se passe-t-il asymptotiquement ? Trouver la signification de cette valeur particulière et calculer alors la repartition asymptotique de la population dans les différentes classes d’âge. On pourra se renseigner ici sur les notions de valeur propre dominante et le théorème de Perron-Frobenius.
3. Un deuxième exemple un peu particulier : On considère une population de saumons femelles. On suppose qu’elles vivent uniquement 3 ans avec un taux de survie de 0.05% pour la première année et de 10% pour la deuxième. On suppose également que chaque femelle de 3 ans donne naissance à 2000 juvéniles. On suppose que la population initiale est de 1000 femelles dans chacune des classes.

Donner le modèle matriciel de Leslie correspondant. Faites quelques simulations et calculs par période de 3 ans. Que remarquez vous ? Extrapoler les résultats en revenant au théorème de Perron-Frobenius.

Troisième partie

1. Le modèle de Leslie initial comporte des limites. Se renseigner sur les modèles dit de Lefkovitch et de Usher. Expliquer alors ces modèles et décrire dans quels cadres ils sont utilisés. On regardera plus particulièrement les exemples de la tortue de mer (Crouse et al, 1987), d’insectes soumis à des récoltes ou encore d’exploitation forestière (Usher, 1966). Que prédisent-ils de plus que les modèles de Leslie classiques ?
2. On pourra aussi regarder si le temps le permet des modèles prenant en compte l’espace explicitement et les transferts des populations entre ces différents patches.
3. Pour chacun des cas qui vous plaira, des illustrations à l’aide de simulations seront à proposer.