Plan

1. Introduction to algorithm complexity
2. Exact Pattern Matching
3. Graph algorithms
4. Dynamic Programming
   - General Presentation
   - Fibonacci Sequence
   - Paradigmatic example : the backpack problem
5. Sequence Comparison

General Presentation

« programmation dynamique » : ensemble de techniques qui permettent de résoudre les problèmes en combinant les solutions de sous-problèmes, un peu à la manière de l'approche « diviser pour régner ».
Grande différence :

- « diviser pour régner » : tous les sous-problèmes sont indépendants. Si les ss-pb ne sont pas indépendants, $\Rightarrow$ algorithmes très peu efficace (complexité souvent exponentielle)
- « programmation dynamique » : applicable quand les ss-pb ne sont pas indépendants, c'est-à-dire même s'il existe des ss-ss-pbs en commun.

La programmation dynamique aborde ce problème de sous-problèmes non indépendants de la manière suivante :

- l'approche résout les sous-problèmes qu'une seule fois, même si ces sous-problèmes arrivent plusieurs fois ;
- cela n'est possible que parce qu'elle mémorise les solutions de tous les sous-problèmes qu'elle rencontre.

On utilise surtout la programmation dynamique pour des problèmes d'optimisation. Souvent, il y a plusieurs solutions optimales, et dans ce cas-là, suivant les implémentations de la programmation dynamique, on peut extraire l'une d'entre elle, ou l'ensemble des solutions optimales.

Useless example

Fibonacci sequence :

$$\begin{cases} f(0) & = & 1 \\ f(1) & = & 1 \\ f(n+1) & = & f(n) + f(n-1) \quad \forall n > 1 \end{cases}$$

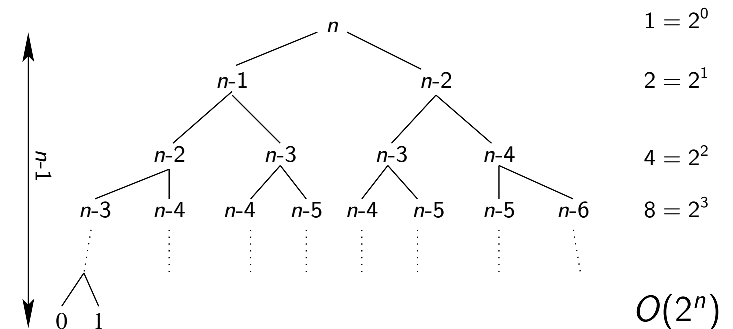
La définition même de la suite est récursive.
$\Rightarrow$ très facile d'écrire un programme récursif pour le calcul du $(n+1)^{\text{ième}}$ élément :

- appel récursif pour le calcul de $f(n)$
- appel récursif pour calcul de $f(n-1)$
- calcul de $f(n+1) = f(n) + f(n-1)$

Voila le pseudo-code de cet algorithme :

```
1     def fibo(n):
2       if n=0 or n=1:
3         return(1)
4       else:
5         return( fibo(n-1) + fibo(n-2) )
```


Computing the complexity (recursive approach)

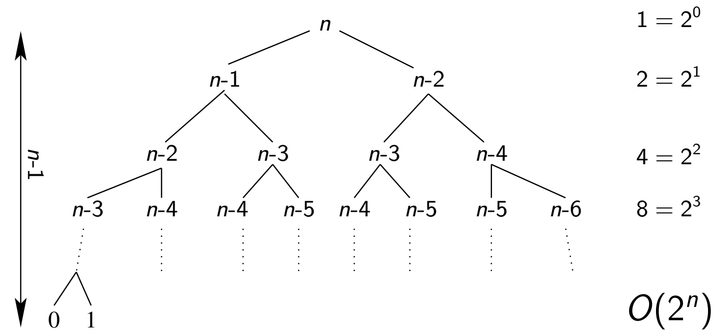


- A chaque nœud, une addition $\Rightarrow$ complexité proportionnelle au # nœuds.
- Si on suit la branche de gauche, il y a n étapes.
- Si on suit la branche la plus à droite, il y $n/2$ étapes.
- Donc si on coupe l'arbre à la profondeur $n/2$, on a un arbre binaire complet.
  niveau 1 : 1 nœud ;
  niveau 2 : 2 nœuds ;
  niveau 3 : $2^{(3-1)}$ nœud
  ...
  niveau $n/2$: $2^{n/2-1}$

  $$1 + 2 + ... + 2^{n/2-1} = \frac{2^{n/2}-1}{2-1} = 2^{n/2} - 1$$

  La complexité est au moins en $\Omega(2^{n/2})$, borne inférieure asymptotique.
  Sur l'arbre binaire complet de profondeur n, $\Rightarrow$ complexité en $O(2^n)$.

Computing the complexity (recursive approach)



$1 = 2^0$

$2 = 2^1$

$4 = 2^2$

$8 = 2^3$

$O(2^n)$

La complexité est donc exponentielle !
Impossible de l'utiliser pour n grand.
Raison : l'algorithme passe son temps à recalculer des choses qu'il a déjà calculé.
beaucoup de sous-problèmes en commun : par exemple, on calcule 3 fois $f(n-3)$...
Pour avoir une chance d'améliorer la complexité, il faut essayer de mémoriser les valeurs que l'on doit calculer, afin de ne avoir à les re-calculer, si on rencontre plus tard le même sous problème.

C'est l'essence même de la programmation dynamique.

Illustration of Prog. Dyn (Fibonacci sequence)

Algorithmics for Biology
Jean-Paul Comet
Complexity
Pat. Matching
Graphs
Dyn.Prog.
General Presentation
Fibonacci
backpack
Sequences

L'algorithme ci-dessous se décompose en deux fonctions :

- initialisation de la structure de données mémorisant les solutions intermédiaires (ici, un tableau),
- deux appels récursifs à la fonction.

Avant de lancer le calcul récursif, la deuxième fonction teste si le calcul n'aurait pas déjà été fait.

```
1   fibo1(n)
2       - initialisation du tableau : tous les éléments à 0
3       - Tableau[1] = 1
4       - Tableau[0] = 1
5       - retourner fibo2(n, tableau);
6
7   fibo2(n,tableau)
8       - si tableau[n] != 0 alors retourner tableau[n]
9       - sinon
10          r1 = fibo2(n-1, tableau)
11          r2 = fibo2(n-2, tableau)
12          r  = r1 + r2
13          tableau(n) = r
14          retourner(r);
```

Complexité :

- La phase d'initialisation est en $\Theta(n)$
- les appels récursifs sont en nombre proportionnel à n, car il n'est fait que si le calcul n'a jamais été fait avant.
- Ainsi la complexité totale est en $\Theta(n)$

Iterative version of the algorithm (Fibonacci)

Algorithmics for Biology
Jean-Paul Comet
Complexity
Pat. Matching
Graphs
Dyn.Prog.
General Presentation
Fibonacci
backpack
Sequences

Notons tout de même que l'on peut écrire une version itérative de l'algorithme :

```
1   fiboIteratif(n)
2      a = 1;
3      b = 1;
4      Pour i = 2 à n faire
5         c = a + b;
6         a = b;
7         b = c;
8      Fin Pour
9      Retourner (b);
```

Complexité de l'algorithme itératif : $O(n)$

Method for developing a Dyn. Prog. algorithm

Algorithmics for Biology
Jean-Paul Comet
Complexity
Pat. Matching
Graphs
Dyn.Prog.
General Presentation
Fibonacci
backpack
Sequences

4 étapes :

1. caractériser la famille de problèmes à laquelle appartient le problème initial,
2. définir les relations entre les solutions aux problèmes de cette famille,
3. construire un algorithme récursif basé sur ces relations,
4. s'il y a des sous-problèmes en commun, construire un algorithme de programmation dynamique en stockant les résultats des sous-problèmes pour ne pas avoir à les recalculer.

Paradigmatic example : the backpack problem

Backpack problem

maximiser le **bénéfice** obtenu en remplissant un sac à dos avec des objets :

- Chaque objet a un bénéfice ($\in \mathbb{R}$) et un poids ($\in \mathbb{N}$).
- On ne doit pas dépasser un poids total maximal donné au départ.

Si on pouvait fractionner les objets, on pourrait commencer par les objets qui rapportent le plus (par unité de poids) puis s'il reste de la place, continuer avec les objets qui rapportent le plus parmi ceux qui restent... Mais cette approche ne conduit pas à une solution optimale pour un problème non fractionnable.

Notation :

- W : le poids maximal pouvant être contenu par le sac.
- n : le nombre total d'objets.

CÔTE D'AZUR
Algorithmics for Biology
Jean-Paul Comet
Complexity
Pat. Matching
Graphs
Dyn.Prog.
General Presentation
Fibonacci
backpack
Sequences

Paradigmatic example : the backpack problem

Backpack problem

maximiser le **bénéfice** obtenu en remplissant un sac à dos avec des objets :

- Chaque objet a un bénéfice ($\in \mathbb{R}$) et un poids ($\in \mathbb{N}$).
- On ne doit pas dépasser un poids total maximal donné au départ.

On va construire un algorithme de programmation dynamique. Voici les 4 étapes :

1. Définir la famille de problèmes à laquelle appartient le problème initial
2. relations entre les différents sous-problèmes
3. algorithme récursif qui réponde au problème.
4. stockage des résultats intermédiaires pour ne pas avoir à les recalculer.

CÔTE D'AZUR
Algorithmics for Biology
Jean-Paul Comet
Complexity
Pat. Matching
Graphs
Dyn.Prog.
General Presentation
Fibonacci
backpack
Sequences

Paradigmatic example : the backpack problem

Backpack problem

maximiser le **bénéfice** obtenu en remplissant un sac à dos avec des objets :

- Chaque objet a un bénéfice ($\in \mathbb{R}$) et un poids ($\in \mathbb{N}$).
- On ne doit pas dépasser un poids total maximal donné au départ.

1. Définir la famille de problèmes à laquelle appartient le problème initial : $B(k, w)$ va représenter le bénéfice optimal obtenu en remplissant le sac en utilisant uniquement les items $1, 2, ..., k$ sans jamais dépasser un poids w.
2. relations entre les différents sous-problèmes :
   $+$ relations qui permettent de décomposer un problème en sous-problèmes de tailles plus petites.

   $+$ cas de base pour lesquels une solution est évidente.
   - Si le poids total autorisé est $w = 0$, alors, on ne peut mettre aucun objet dans le sac à doc, ainsi, $B(k, 0) = 0$.
   - Pour résoudre $B(k, w)$, si $poids[k] > w$, on est ramené au cas $B(k-1, w)$, car il n'est pas possible de choisir l'objet k.
   - Si $poids[k] \leq w$, on a 2 possibilités :
     - inclure l'item k : bénéfice$[k] + B(k-1, w - poids[k])$
     - ne pas prendre l'item k : $B(k-1, w)$
   - Et on retourne le maximum des 2 choix précédents.

CÔTE D'AZUR
Algorithmics for Biology
Jean-Paul Comet
Complexity
Pat. Matching
Graphs
Dyn.Prog.
General Presentation
Fibonacci
backpack
Sequences

Paradigmatic example : the backpack problem

Backpack problem

maximiser le **bénéfice** obtenu en remplissant un sac à dos avec des objets :

- Chaque objet a un bénéfice ($\in \mathbb{R}$) et un poids ($\in \mathbb{N}$).
- On ne doit pas dépasser un poids total maximal donné au départ.

3. algorithme récursif qui réponde au problème.

```
1   BeneficeSac (W:int, n:int, poids:tableau de int, benef:tableau de int)
2      Retourner BS(n,W,poids,benef)
3
4   BS(k:int, w:int , poids:tableau de int, benef:tableau de int)
5       si w=0 alors retourner 0;
6       si poids[k]>w alors
7           retourner BS(k-1,w,poids,benef)
8       sinon
9           b1 = BS(k-1, w-poids[k], poids, benef) + benef[k];
10          b2 = BS(k-1, w, poids, benef);
11          retourner (max(b1,b2));
```

Exemple :

objet	0	1	2	3	4	5
poids	5	2	4	6	3	1
benef	14	6	13	17	10	4

Si on pose $W = 12$, le bénéfice optimal est 37. 3 solutions mènent à cet optimal :

- les objets 6, 5, 4 et 2
- les objets 1, 2, 3 et 6
- les objets 1, 3, 5

Malheureusement, cette version récursive calcule plusieurs fois la solution de sous-problèmes identiques.

Algorithmics for Biology
Jean-Paul Comet
Complexity
Pat. Matching
Graphs
Dyn.Prog.
General Presentation
Fibonacci
backpack
Sequences

Backpack problem

maximiser le **bénéfice** obtenu en remplissant un sac à dos avec des objets :

- Chaque objet a un bénéfice ($\in \mathbb{R}$) et un poids ($\in \mathbb{N}$).
- On ne doit pas dépasser un poids total maximal donné au départ.

4. stockage des résultats intermédiaires pour ne pas avoir à les recalculer.
Il est possible de construire une version récursive dans laquelle le tableau des résultats intermédiaires est mis à jour à la demande.
On préfère ici une version itérative qui remplit ce tableau :

```
1  BeneficeSac(W:int , n:int, poids:tableau de int, benef: tableau)
2     de i=0 à n-1        /* les objets sont numérotés de 0 à n-1 */
3        B[0,i] = 0
4     de w = 1 à W
5        B[w,0] = (w>poids[0])? benef[0] : 0
6        De i = 1 à n-1
7           si poids[i]>w alors
8              B[w,i] = B[w,i-1]
9           sinon
10             B[w,i] = max(B[w,i-1], B[w-poids[i],i-1] + benef[i])
11    renvoyer B[W,n-1]
```


CÔTE D'AZUR
Paradigmatic example : the backpack problem

Algorithmics for Biology
Jean-Paul Comet
Complexity
Pat. Matching
Graphs
Dyn.Prog.
General Presentation
Fibonacci
backpack
Sequences

Backpack problem

maximiser le **bénéfice** obtenu en remplissant un sac à dos avec des objets :

- Chaque objet a un bénéfice ($\in \mathbb{R}$) et un poids ($\in \mathbb{N}$).
- On ne doit pas dépasser un poids total maximal donné au départ.

Habituellement, pour avoir la (ou les) liste(s) qui mène(ent) à l'optimal, on part de la case du tableau `B[W,n-1]`, et à chaque étape on cherche quelle opération a permis d'obtenir cette valeur. Cette phase de remontée est assez classique, on la retrouvera lors de l'étude des algorithmes d'alignements de séquences.
Suivant les languages de programmation utilisés, il est cependant possible de mémoriser lors de la phase de descente, les ensembles d'objets qui mènent au nombre que l'on inscrit dans le tableau. Lorsque tout le tableau est construit, on a donc directement les listes d'objets qui mènent à l'optimal.