

EXERCICES CORRIGÉS

Traitement Spatial

DEA SICOM 2001

... Onze à vingt et un.

TABLE DES MATIÈRES

<i>Avertissement</i>	3
Exercice 11 : Antennes de géométrie aléatoire.	4
Exercice 12 : Lobes secondaires pour un défaut périodique	8
Exercice 13 : Gain d'Antenne.....	11
Exercice 14 : Effets parasites (amplitude/phase)	16
Exercice 15 : Lobe Image et incertitude sur la célérité des ondes.....	20
Exercice 16 : Lobe Image et largeur de la fonction d'ambiguïté.	21
Exercice 17 : Antenne à symétrie circulaire.....	26
Exercice 18 : Scalping Loss	30
Exercice 19 : Large-Bande.....	33
Exercice 20 : Effet du mouvement propre de l'antenne.....	39
Exercice 21 : Focalisation.....	41

Avertissement

Les exercices proposés ci-après sont d'intérêts et de difficultés très variables. Les corrigés proposés sont plutôt des petits extraits de cours commentés. Ils sont souvent l'occasion de digressions plus ou moins éloignées de la question initiale. Certains développements et courbes ont nécessité l'usage d'un calculateur qui ne serait pas forcément disponible en situation réelle d'examen. Bien que dénommés « Exercices » il s'agit en fait d'une autre façon de voir un cours de traitement d'antenne de manière un peu plus appliquée.

Exercice 11 : Antennes de géométrie aléatoire.

Soit une antenne linéaire dont les K capteurs sont aléatoirement répartis dans un intervalle centré de longueur L . La position des capteurs est supposée résulter d'un tirage aléatoire d'une loi statistique dérivant de la densité de probabilité $p(x)$. On demande la forme de la fonction de directivité moyenne, puisqu'il est clair que la fonction de directivité sera ici aléatoire. On demande aussi de préciser ce résultat lorsque le tirage est uniforme. On demande enfin d'évaluer le niveau des lobes secondaires que l'on peut ainsi espérer dans le cas où $K=10$.

Une antenne à réseau de capteurs est dite aléatoire si la position des capteurs est aléatoire. Dans le cas qui nous occupe ici la position des capteurs est parfaitement connue, même si les positions effectives résultent d'un tirage aléatoire. Ce qui nous intéresse donc ici ce sont les conséquences d'une géométrie d'antenne éventuellement défavorable mais connue.

L'intérêt des antennes aléatoires est multiple :

- Tout d'abord, une antenne ordinaire (non aléatoire) est toujours soumise à des erreurs de fabrication qui rendent aléatoires les positions de ses capteurs, même si leurs positions nominales sont connues.
- Ensuite, les antennes aléatoires, comme les antennes aperiodiques, permettent d'éviter les lobes images, avec des capteurs dont la distance moyenne est supérieure à $\frac{\lambda}{2}$, donc plus économique. Tout se passe comme si les lobes parasites, au lieu de s'accumuler dans la même direction en un lobe image très important, se répartissaient dans toutes les directions, ce qui donne un plateau de lobes secondaires importants en moyenne, mais moins élevés qu'un lobe image.
- Par ailleurs, les pannes de capteurs, statistiquement inévitables, finissent par transformer une antenne déterministe en une antenne aléatoire, ou du moins aperiodique, ce qui est un premier pas vers l'aléatoire.
- Enfin, certaines antennes sont aléatoires par nature : par exemple, les antennes composites utilisées en radioastronomie (synthèse d'ouverture) utilisent des capteurs répartis sur tous les continents en des positions que l'on peut considérer comme aléatoires. De même, certains radars utilisent des réseaux de capteurs déployables sur un terrain dont la topographie donne à l'antenne un caractère aléatoire. De même en sismologie, la position des stations de mesure résulte de contraintes géographiques fortes qui donnent à l'antenne une forme quelconque. En acoustique sous-marine, les réseaux de bouées acoustiques dérivantes constituent des antennes aléatoires, etc.

D'une façon générale la possibilité de disposer les capteurs selon une géométrie quelconque est une liberté supplémentaire pour leur déploiement en un réseau.

Cependant la fonction d'ambiguïté d'une antenne dont la géométrie n'est pas régulière peut présenter des défauts qu'il faut analyser.

On peut très facilement visualiser la question en traçant la fonction de directivité d'une antenne aléatoire.

Prenons l'exemple d'une antenne linéaire et de capteurs aléatoirement répartis dans une ouverture L .

On peut s'intéresser à deux questions :

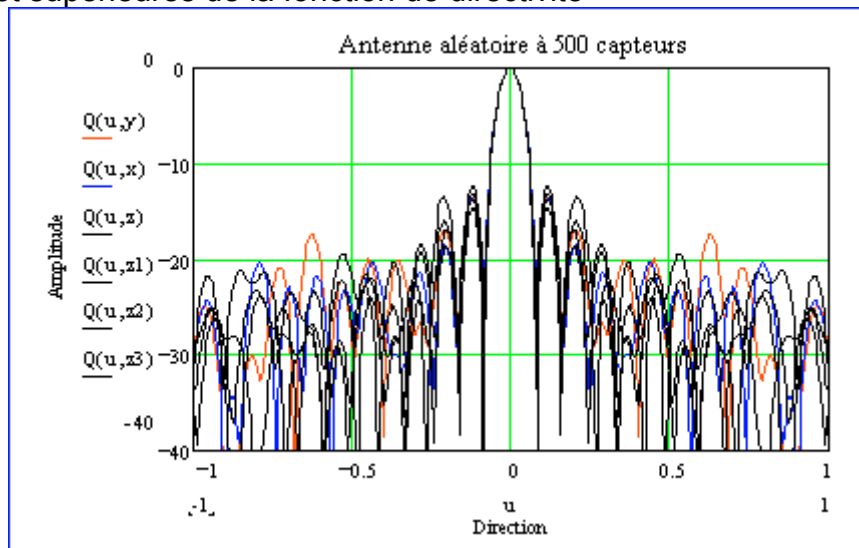
1. Tracé de la fonction de directivité en fonction du nombre de capteurs.

Pour cela, on réalise un tirage de N positions, et on trace les fonctions de directivité au fur et à mesure que l'on rajoute des capteurs de 1 à N .

- On constate que la fonction de directivité se stabilise progressivement en commençant par le lobe principal, puis dans une zone de plus en plus large autour de ce lobe principal ; cette zone constitue ce qu'on pourrait appeler un « horizon de contrôle ».
- En dehors de l'horizon de contrôle (dont la limite est assez floue), le comportement de la fonction de directivité possède une allure imprévisible.

2. Tracé de la fonction de directivité pour un nombre de capteurs donné, mais selon des tirages aléatoires distincts.

Les remarques précédentes sont bien illustrées par la représentation des enveloppes inférieures et supérieures de la fonction de directivité



La figure précédente permet de préciser les principales questions liées aux antennes aléatoires :

- combien faut-il de capteurs pour contrôler le lobe principal, en fonction de l'horizon de contrôle souhaité ?
- comment assurer que les lobes secondaires ne dépassent pas un certain niveau ?

Nous allons aborder progressivement ces questions en nous intéressant d'abord aux deux premiers moments de la fonction de directivité :

Moyenne et variance de la fonction de directivité

Pour une antenne linéaire constituée de capteurs de positions $(x_k)_{k=1,K}$, le vecteur source s'écrit :

$$\underline{(d)} = \text{col} \left\{ \exp \left(\frac{2i\pi}{\lambda} x_k u \right) \right\}$$

avec $u = \cos \theta$

La fonction de directivité du traitement classique, pour une direction de pointage u_0 est :

$$D(u) = \frac{1}{K^2} \left| \sum_{k=1, K} \exp\left(\frac{2i\pi}{\lambda} x_k (u - u_0)\right) \right|^2$$

$D(u)$ est une fonction aléatoire en raison du caractère aléatoire des x_k dont on va calculer les 2 premiers moments :

Analyse de la moyenne :

$$E\{D(u)\} = \frac{1}{K^2} \sum_{k,l} E \left[\exp\left(\frac{2i\pi}{\lambda} (x_k - x_l)(u - u_0)\right) \right]$$

Si la suite $(x_k)_{k=1, K}$ résulte d'un tirage aléatoire d'une variable aléatoire distribuée selon une densité de probabilité $p(x)$, on obtient :

$$E\{D(u)\} = \frac{1}{K} + \left(1 - \frac{1}{K}\right) \left| \Phi_x\left(\frac{2\pi}{\lambda}(u - u_0)\right) \right|^2$$

où $\Phi_x(\cdot)$ est la fonction caractéristique de x , transformée de FOURIER de la densité $p(x)$. Ceci constitue la réponse à la première question de l'énoncé.

Si, par exemple, x est une variable aléatoire uniforme dans une ouverture L , on a :

$$p(x) = \frac{1}{L} \quad \text{si } x \in \left[-\frac{L}{2}, +\frac{L}{2}\right]$$

$$p(x) = \emptyset \quad \text{sinon.}$$

$$\text{Alors, } \Phi_x\left[\frac{2\pi}{\lambda}(u - u_0)\right] = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \exp\left(\frac{2i\pi}{\lambda}(u - u_0)x\right) dx = \text{Sinc}\left(\frac{\pi}{\lambda}(u - u_0)L\right)$$

On trouve donc la réponse à la seconde question de l'énoncé:

$$E\{D(u)\} = \left(1 - \frac{1}{K}\right) \text{Sinc}^2\left(\frac{\pi.L}{\lambda}(u - u_0)\right) + \frac{1}{K}$$

Cette formule confirme les observations faites précédemment et en constitue une justification. On constate en effet que, en dehors du lobe principal, la fonction de directivité possède un plateau en $\frac{1}{K}$ et que, dans la zone d'influence du lobe principal (c'est-à-dire pour $\text{Sinc}^2\left(\frac{\pi.L}{\lambda}(u - u_0)\right) \gg \frac{1}{K}$), la fonction de directivité est sensiblement la même que celle d'une ouverture uniforme.

Dans le cas particulier où $K=10$ le lobe secondaire dominant sera vraisemblablement de l'ordre de -10 dB, plutôt que les -13 dB habituels, liés à la fonction sinus cardinal. Telle est la réponse à la dernière question de l'énoncé.

On constate aussi que l'on peut contrôler la forme du lobe principal en choisissant la densité de probabilité $p(x)$ de manière judicieuse (via la fonction caractéristique).

Analyse de la variance

La variance de $D(u)$ se calcule de manière similaire, à partir de :

$$E\{D^2(u)\} = \frac{1}{K^4} \sum_{k,l,m,n} E\left[\exp\left(\frac{2i\pi}{\lambda}(x_k - x_l + x_m - x_n)(u - u_0)\right)\right]$$

Il faut examiner tous les cas possibles, travail assez minutieux, mais qui ne présente pas de difficultés de principe.

Commentaire : L'analyse de la forme de la fonction de directivité d'une antenne aléatoire par le calcul des 2 premiers moments est une approche qui n'est pas toujours jugée satisfaisante dans la pratique, surtout lorsque le nombre de capteurs est faible (Il suffit de penser par exemple au cas où $K=2$). En fait la théorie ne semble exploitable que si le nombre de capteurs est suffisamment grand pour garantir l'absence de lobes images (donc typiquement $K > L/\lambda$, ou même $K > 2L/\lambda$).

Une autre approche utilisée propose une évaluation du lobe secondaire maximum.

Exercice 12 : Lobes secondaires pour un défaut périodique

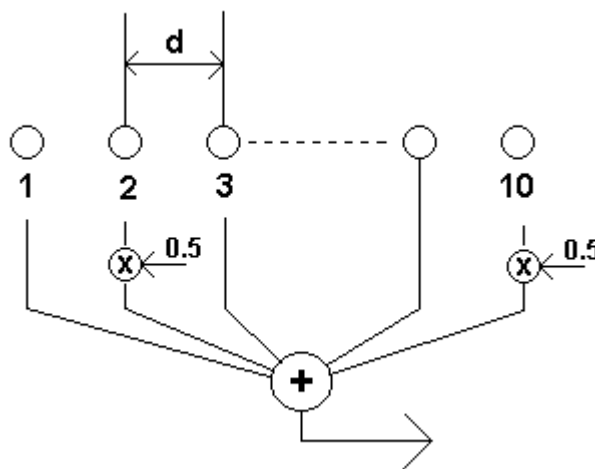
Une antenne linéaire périodique à 10 capteurs omnidirectionnels de pas d tombe partiellement en panne.

Les capteurs pairs (n° 2, 4, ..., 10) sont atténués d'un facteur 2 en amplitude par rapport aux capteurs impairs (n° 1, 3, ..., 9), non touchés.

Ce phénomène n'est pas pris en compte par le traitement d'antenne (classique, non pondéré, adapté au modèle ondes planes).

L'antenne étant pointée dans la direction perpendiculaire à son axe, on demande le niveau du plus fort lobe secondaire pour la fréquence f pour laquelle le pas d entre

capteurs est égal à la demi-longueur d'onde $d = \frac{\lambda}{2}$



La fonction de directivité de l'antenne se calcule facilement en considérant que c'est une antenne linéaire périodique à 5 capteurs de pas $2d$, chaque capteur étant un doublet directif. On peut aussi, bien sûr, calculer la fonction de directivité directement.

Le filtre spatial utilisé est celui dont la fonction de transfert est $\underline{h} = \frac{1}{10} \text{col}\{1,1,..1\}$ de manière à ce que, si l'antenne n'est pas perturbée, on a $\underline{h}^T \underline{1} = 1$ (Gain unité sur le signal).

En fait il faut considérer ici l'effet de la perturbation comme faisant partie du filtre spatial. La fonction de directivité s'écrit :

$$D(\theta) = \left| \underline{h}^T \underline{d}_\theta \right|^2$$

avec
$$\underline{h} = \frac{1}{10} \text{col}\{1,1,..1\} = \left[\frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{5} \right]^T$$

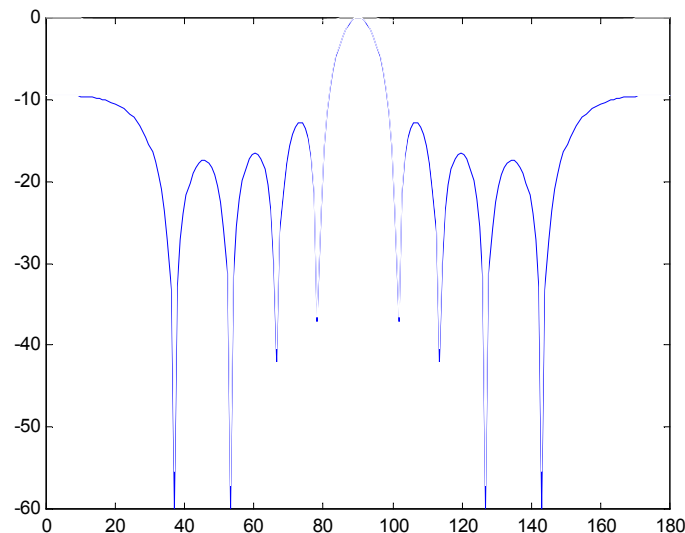
et, bien sûr, $\underline{d}_\theta = \text{col} \left\{ \exp \left(2i\pi \frac{(k-1)d}{\lambda} \cos \theta \right) \right\}_{k=1,K}$

Alors $D(\theta) = \left| \sum_{k=1,K} \alpha_k \exp \left(2i\pi \frac{(k-1)d}{\lambda} \cos \theta \right) \right|^2$

avec $\alpha_k = \frac{1}{10}$ si k est impair et $\alpha_k = \frac{1}{20}$ sinon

$$D(\theta) = \frac{1}{100} \left| \sum_{k=1,5} \exp \left(2i\pi \frac{d}{\lambda} (k-1) \cos \theta \right) \right|^2 \left| 1 + \alpha \exp \left(2i\pi \frac{d}{\lambda} \cos \theta \right) \right|^2$$

La fonction de directivité est tracée sur la figure suivante



Fonction de directivité de l'antenne complète (continu), du réseau et du motif (pointillé)

Lorsque $\theta = \frac{\pi}{2}$ on obtient $D\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4}(1 + \alpha)^2 < 1$

Il y a donc une perte sur le niveau du signal

Si $\alpha = \frac{1}{2}$ on aura $D\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{9}{16}$ soit -2.5 dB.

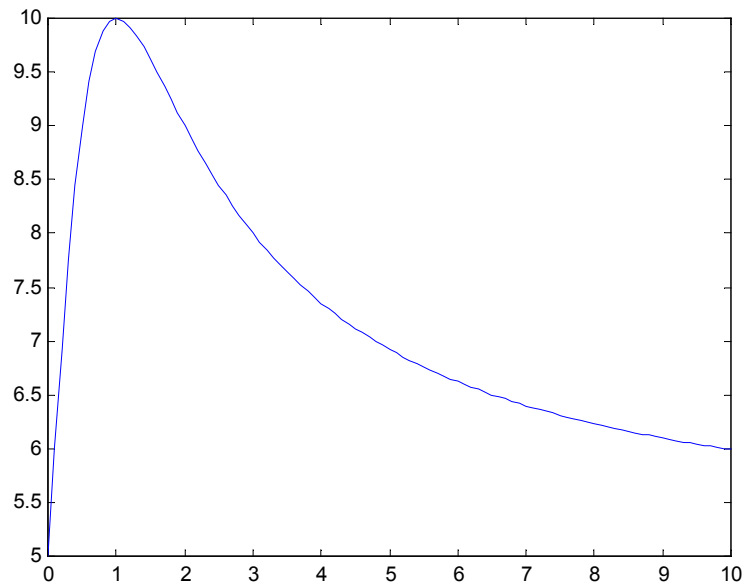
Cette perte affecte-t-elle la détectabilité des sources dans le bruit ?
Pour répondre à cette question il faut s'intéresser au calcul du gain d'antenne.

$$G = \frac{(1 + \alpha)^2 / 4}{\underline{h}^+ J \underline{h}}$$

Tout d'abord, si $J=1$ (bruit incohérent) on aura :

$$G = 5 \frac{(1 + \alpha)^2}{1 + \alpha^2} \quad \text{car} \quad \underline{h}^+ \underline{h} = \frac{1}{100} (5 + 5\alpha^2) = \frac{1 + \alpha^2}{20}$$

G est une fonction de α maximale pour $\alpha=1$ (pas de panne).



Gain d'antenne en fonction de l'amplitude du défaut

Pour $\alpha=0.5$, $G=9$.

On perd donc en détection puisque le gain d'antenne passe de 10 à 9 (10 dB à 9.54 dB, soit moins de 0.5 dB de perte et non pas 2.5 dB !).

Si maintenant on se place dans le cas du bruit ambiant isotrope sphérique, on trouvera le même résultat car $d=\lambda/2$.

Revenons au problème posé initialement.

L'origine physique du lobe secondaire parasite provient de la présence d'un lobe de réseau contrarié (à cause de la périodicité de pas $2d$ du défaut). L'antenne peut être considérée comme un réseau de 5 capteurs directifs de pas $2d$. Il y a aura donc un lobe image à $\theta=0$ et $\theta=\pi$. Ce lobe image est atténué par la directivité du motif élémentaire.

Le niveau du secondaire dominant est alors

$$SL = \frac{1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos \pi}{(1 + \alpha)^2} = \left(\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right)^2 \quad \text{Si } \alpha=0.5, SL=1/9 \text{ (soit } -9.54 \text{ dB).}$$

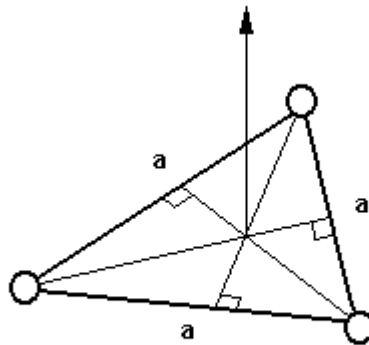
Exercice 13 : Gain d'Antenne

Une antenne est constituée de 3 capteurs omnidirectionnels formant un triangle équilatéral.

Cette antenne est "pointée" dans la direction de l'axe perpendiculaire au plan du triangle (onde plane).

On cherche le côté a du triangle pour lequel le gain du traitement classique d'antenne est maximum à la fréquence f dans du bruit isotrope sphérique.

La valeur de a s'exprime en fonction de la longueur d'onde λ .



Le gain d'antenne s'écrit :

$$G = \frac{9}{\sum_{k,l} \text{sinc} \left(2\pi \frac{d_{kl}}{\lambda} \right)} \quad \text{avec } d_{kl} = a \text{ si } k \neq l$$

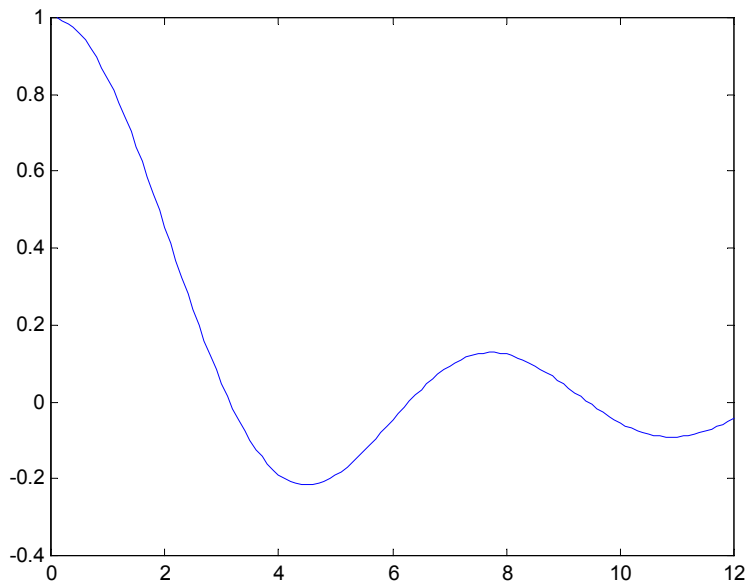
$$\text{d'où } G = 9 / \left\{ 3 + 6 \text{sinc} \left(2\pi \frac{a}{\lambda} \right) \right\}$$

Maximiser le gain d'antenne selon a revient à minimiser le dénominateur de G , c'est à dire à ajuster a de telle sorte que $\text{sinc} \left(2\pi \frac{a}{\lambda} \right)$ soit minimum, donc le plus négatif possible.

La forme de la fonction sinus cardinal suggère que la valeur de x qui minimise $\text{sinc}(x)$ est donnée par :

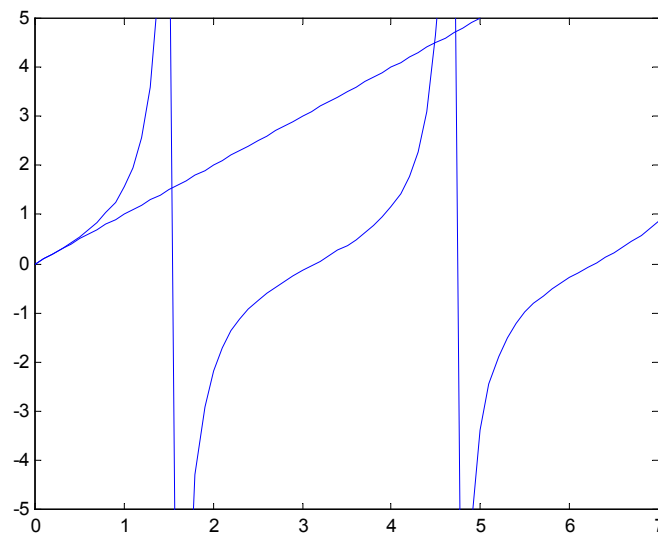
$$\frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2} = 0 \quad \text{soit } \text{tg}(x) = x$$

et c'est la solution voisine de $3\pi/2$ qui nous intéresse.



En posant $x = \frac{3\pi}{2} - \varepsilon$, on trouve une solution approximative :

$$\text{Tg}(x) = \frac{1}{\text{Tg}(\varepsilon)} = \frac{3\pi}{2} - \varepsilon \quad \text{soit} \quad \varepsilon \cong \frac{2}{3\pi}$$



On trouve donc $x = 2\pi \frac{a}{\lambda} \cong \frac{3\pi}{2} - \frac{2}{3\pi}$, soit $\frac{a}{\lambda} \cong \frac{3}{4} - \frac{1}{3\pi^2} \cong 0.72$

En fait on peut facilement déterminer la solution de l'équation $\text{Tg}(x) = x$ voisine de $\frac{3\pi}{2}$ comme étant $x=4.493$. d'où la réponse plus précise $\frac{a}{\lambda} = 0.715$.

On peut être surpris de cette réponse, assez différente de $\frac{d}{\lambda} = 0.5$, retenue habituellement pour la distance intercapteurs dans les antennes. Pour cette distance, le bruit serait indépendant entre capteurs, à la fois pour le bruit incohérent et le bruit isotrope sphérique. En fait, du strict point de vue du gain d'antenne, et spécifiquement pour la direction de pointage orthogonale au plan de l'antenne, on trouve ici une solution différente qui exploite les corrélations négatives du bruit isotrope sphérique.

La valeur du gain obtenu se calcule aisément :

$$G = \frac{9}{3 + 6 \sin c\left(2\pi \frac{a}{\lambda}\right)} = \frac{3}{1 + 2 \sin c(x)}$$

Lorsque $Tg(x) = x$, on aura $\sin c(x) = \cos(x)$ et, pour $x = \frac{3\pi}{2} - \varepsilon$, on obtient $\cos(x) \cong -\frac{2}{3\pi}$.

D'où l'expression approchée du gain :

$$G = 3 \left(1 - \frac{4}{3\pi}\right) \text{ soit } G \cong 7.17 \text{ dB}$$

Le gain d'antenne peut donc être bien supérieur au nombre de capteurs (4.77 dB).

Ce résultat n'est plus vrai quand le nombre de capteurs augmente, car il n'est plus possible de disposer les capteurs de manière à ce que toutes les distances intercapteurs soient telles que les corrélations du bruit soient négatives pour tous les couples de capteurs.

Par ailleurs l'écartement optimum dépend de la direction de pointage. On peut s'en rendre compte dans un cas simple à 2 capteurs.

Considérant deux capteurs séparés de a . Si l'antenne est pointée par le travers, le gain d'antenne s'écrit :

$$G\left(\frac{\pi}{2}, a\right) = \frac{4}{2 + 2 \sin c\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)}$$

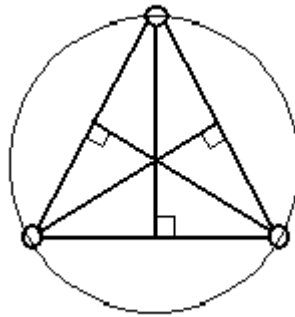
Si elle est pointée selon l'axe du doublet, cette antenne aura pour gain :

$$\begin{aligned}
 G(0, a) &= \frac{4}{2 + 2 \sin c\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right) \cos\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)} \\
 &= \frac{4}{2 + 2 \sin c\left(\frac{4\pi a}{\lambda}\right)} = G\left(\frac{\pi}{2}, 2a\right)
 \end{aligned}$$

Pour le pointage axial, il faut séparer les capteurs deux fois moins que dans le cas transverse.

De même, avec l'antenne triangulaire, si elle est pointée dans une direction contenue dans le plan, la valeur optimum de a est modifiée.

Considérons un repère dans lequel le centre de gravité du triangle est pris comme origine. Les capteurs sont disposés sur un cercle de rayon $\frac{a}{\sqrt{3}}$ et d'angles polaires (0° , 120° , 240°).



Si θ désigne l'angle polaire de la direction de pointage, on obtient l'expression suivante du gain d'antenne :

$$G = \frac{9}{\sum_{k,l} \sin c\left(\frac{4\pi R}{\lambda} \sin\left(\frac{k-l}{2} \frac{2\pi}{3}\right)\right) \cos\left(\frac{4\pi R}{\lambda} \sin\left(\frac{k-l}{2} \frac{2\pi}{3}\right)\right) \sin\left(\theta - \frac{k+l}{2} \frac{2\pi}{3}\right)}$$

avec $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$

Soit :

$$G = 9 / \left\{ 3 + 2 \sin c\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right) \left[\cos\left(\frac{2\pi a}{\lambda} \sin \theta\right) + \cos\left(\frac{2\pi a}{\lambda} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)\right) + \cos\left(\frac{2\pi a}{\lambda} \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)\right) \right] \right\}$$

Si $\theta=0$, on obtient

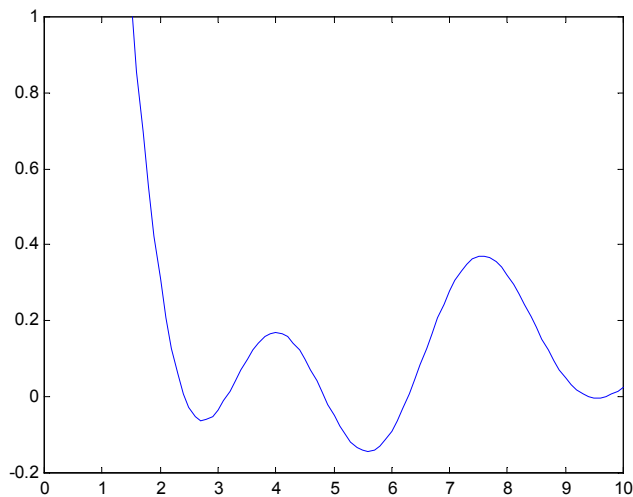
$$G = 9 \left\{ 3 + 2 \sin c \left(\frac{2\pi a}{\lambda} \right) \left[1 + 2 \cos \left(\frac{2\pi a \sqrt{3}}{\lambda} \right) \right] \right\}$$

La valeur de a qui maximise G s'obtient en minimisant la fonction :

$$E(x) = \sin c(x) \left\{ 1 + 2 \cos \left(x \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\}$$

Ce minimum s'obtient numériquement ; on trouvera $\frac{a}{\lambda} \cong 0.889$, ce qui correspondra à un gain de 5.22 dB (4.77 dB correspond à du bruit incohérent, $10 \text{ Log}_{10}(3)=4.77 \text{ dB}$).

Si l'on trace la fonction $E(x)$ ci dessus en fonction de x dans l'intervalle $[0 \ 10]$.



On trouve une courbe qui a plusieurs minima dont le plus marqué est celui donné ci-dessus.

Exercice 14 : Effets parasites (amplitude/phase)

Soit une antenne à $K = 50$ capteurs, dont la géométrie n'est pas précise, et avec laquelle on réalise un traitement d'antenne dont on cherche à contrôler le niveau des lobes secondaires.

L'antenne est réalisée avec des capteurs imparfaits, présentant des défauts dans leur réponse en phase et en amplitude .

Le problème est idéalisé en supposant que les imperfections peuvent être modélisées à l'aide d'un coefficient de pondération complexe pour chaque capteur; pour le $k^{\text{ème}}$:

$$w_k = a_k \exp (i\varphi_k) ; k = 1, K$$

w_k est proche de 1.

Les a_k, φ_k sont des variables aléatoires indépendantes dans leur ensemble.

Les a_k , sont de moyenne 1 et de variance σ_a^2 (amplitude).

Les φ_k sont de moyenne \emptyset et de variance σ_φ^2 (phase).

On demande jusqu'où l'on pourra espérer abaisser le niveau SL des lobes secondaires (par rapport au niveau en pointe du lobe principal : 0dB), en supposant que la dispersion en phase est de 30° (σ_φ), et en amplitude de 1 dB (σ_a).

On calculera tout d'abord la fonction de directivité d'une antenne pondérée par des poids $\{w_k\}_{k=1,K}$ quelconques. Le filtre spatial correspondra à la fonction de transfert :

$$\underline{H} = (W \underline{d}_0)^*$$

Ici W désigne la matrice diagonale de valeurs propres $\{w_k\}_{k=1,K}$.

On utilise généralement des poids normalisés par la condition de « non distorsion » :

$$\underline{H}^T \underline{d}_0 = 1$$

On a donc $\underline{d}_0^+ W \underline{d}_0 = 1 = \sum_{k=1,K} w_k$

La fonction de directivité s'écrit :

$$D(\theta, \theta_0) = \left| \underline{H}^T \underline{d}_\theta \right|^2 = \left| \underline{d}_0^+ W \underline{d}_\theta \right|^2$$

On peut alors préciser les conséquences d'une distorsion de phase et d'amplitude :

$$D(\theta, \theta_0) = \left| \sum_{k=1,K} w_k a_k e^{i\varphi_k} (\underline{d}_0)_k^* (\underline{d}_\theta)_k \right|^2 = \sum_{k,l} w_k w_l a_k a_l e^{i(\varphi_k - \varphi_l)} (\underline{d}_0)_k^* (\underline{d}_\theta)_k (\underline{d}_\theta)_l^* (\underline{d}_0)_l$$

On s'intéresse seulement ici à la valeur moyenne de cette quantité (suivant la statistique des erreurs).

$$\begin{aligned} E\{D(\theta, \theta_0)\} &= \sum_{k,l} w_k w_l (\underline{d}_0)_k^* (\underline{d}_\theta)_k (\underline{d}_\theta)_l^* (\underline{d}_0)_l E\{a_k a_l e^{i(\varphi_k - \varphi_l)}\} \\ &= \sum_{k,l} w_k w_l (\underline{d}_0)_k^* (\underline{d}_\theta)_k (\underline{d}_\theta)_l^* (\underline{d}_0)_l E\{a_k a_l\} E\{e^{i(\varphi_k - \varphi_l)}\} \end{aligned}$$

On exploitera ici les hypothèses faites dans l'énoncé sur la statistique des erreurs de phase et d'amplitude

$$\begin{aligned} E\{D(\theta, \theta_0)\} &= \sum_{k \neq l} w_k w_l (\underline{d}_0)_k^* (\underline{d}_\theta)_k (\underline{d}_\theta)_l^* (\underline{d}_0)_l |\Phi_\varphi(1)|^2 \\ &\quad + \sum_k w_k^2 |(\underline{d}_0)_k^* (\underline{d}_\theta)_k|^2 (1 + \sigma_a^2) \end{aligned}$$

Dans cette expression, la quantité $\Phi_\varphi(t) = E\{\exp(i\varphi t)\}$ désigne la fonction caractéristique de la variable aléatoire φ .

On peut encore écrire le résultat précédent sous une forme plus directement exploitable :

$$E\{D(\theta, \theta_0)\} = D_0 |\Phi_\varphi(1)|^2 + \sum_k w_k^2 |(\underline{d}_0)_k^* (\underline{d}_\theta)_k|^2 (1 + \sigma_a^2 - |\Phi_\varphi(1)|^2)$$

Dans cette expression D_0 désigne la fonction de directivité en l'absence de perturbation.

Pour φ petit, on a $|\Phi_\varphi(1)|^2 \cong 1 - \sigma_\varphi^2$, d'où on déduit :

$$E\{D(\theta, \theta_0)\} = D_0 (1 - \sigma_\varphi^2) + (\sigma_a^2 + \sigma_\varphi^2) \sum_k w_k^2$$

On a utilisé l'hypothèse « retard pur », pour laquelle $(\underline{d}_\theta)_k = \exp(2i\pi f \tau_k)$.

Par ailleurs, selon l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ

$$\left(\sum_k w_k \right)^2 = 1 \leq \left(\sum_k w_k^2 \right) K$$

Pour le contrôle des lobes secondaires, on peut voir sur l'expression de la fonction de directivité moyenne que, même si la pondération est ajustée pour avoir des lobes secondaires très faibles sur la loi nominale (D_0), les lobes secondaires resteront, en moyenne, supérieurs à $(\sigma_a^2 + \sigma_\varphi^2) / K$.

On en déduit que, pour une dispersion de 30° on a :

$$\sigma_\varphi^2 = \left(\frac{30\pi}{180} \right)^2 = 0.274$$

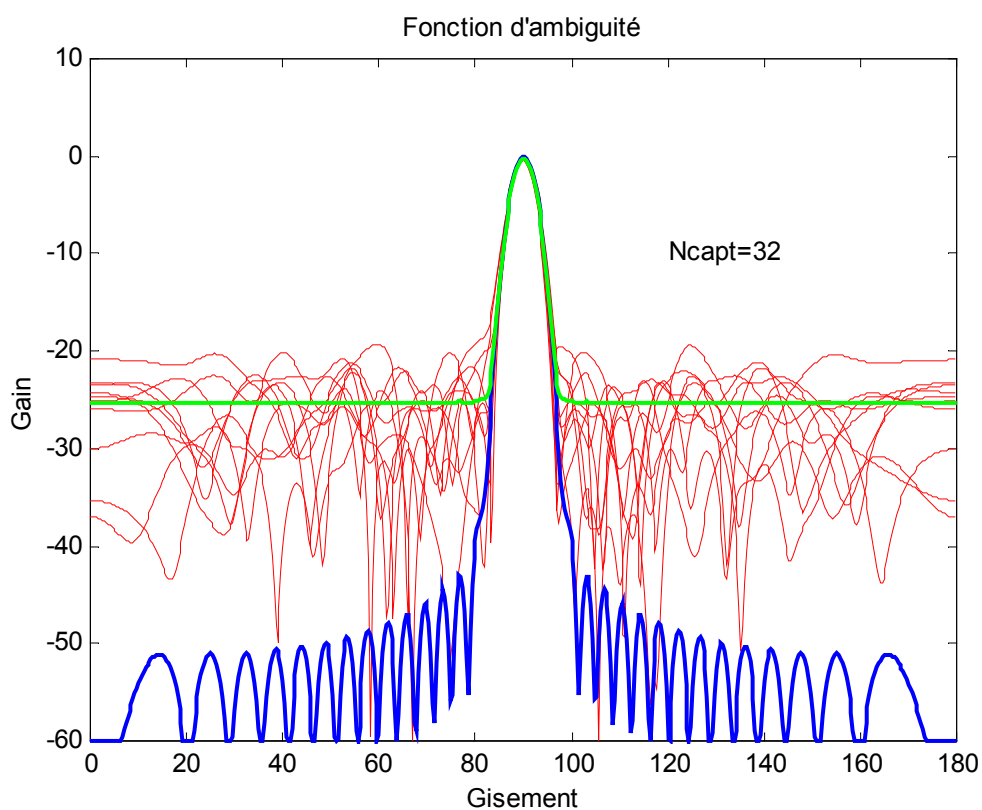
et, pour une dispersion en amplitude de 1 dB, on a :

$$\sigma_a \approx 0.12 \text{ et donc } \sigma_a^2 = 0.015$$

Le niveau minimum des lobes secondaires sera donc

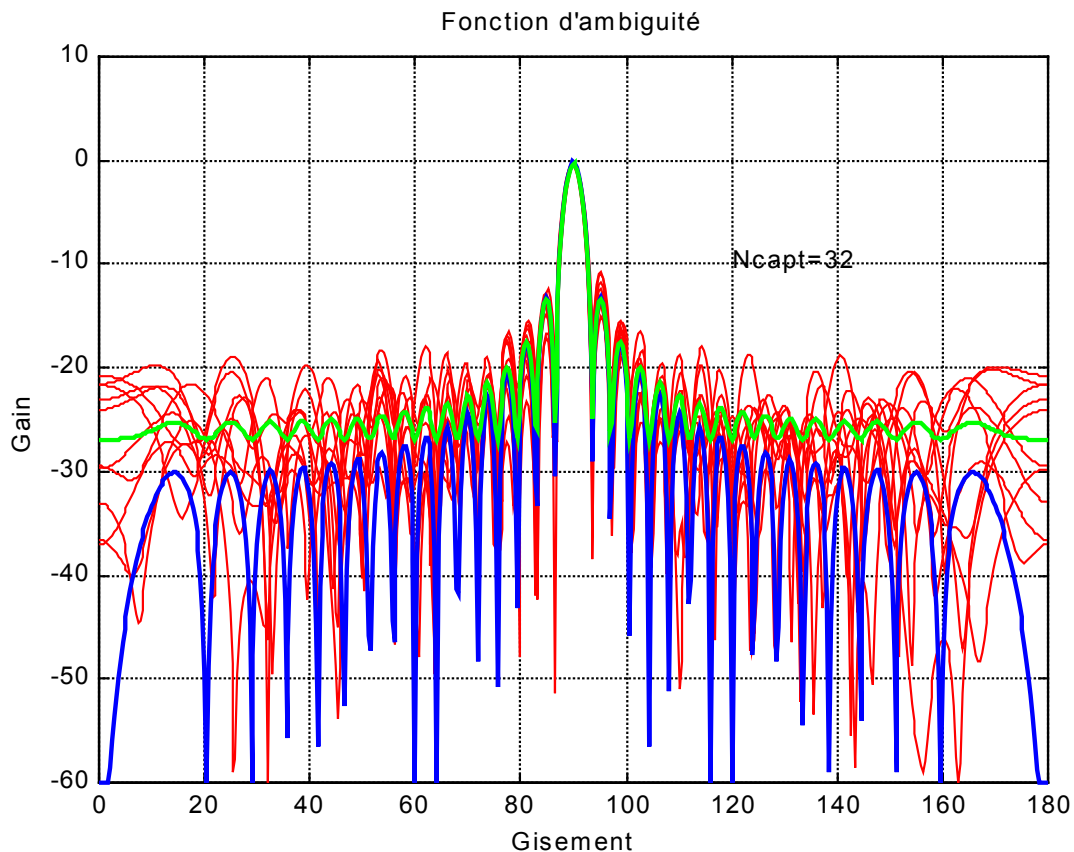
$$\frac{0.274 + 0.015}{50} \cong -22 \text{ dB}$$

On peut d'ailleurs confirmer ce calcul à l'aide de la programmation des formules précédentes.



Cette figure représente la fonction de directivité du traitement classique pondéré pour une antenne linéaire périodique pointée dans la direction transverse. La pondération devrait théoriquement abaisser le niveau des lobes secondaires à mieux que 50 dB, ce qui est montré sur la courbe centrale en trait épais. Pourtant la réalité est tout autre lorsque l'antenne est soumise à des perturbations de phase et d'amplitude. Superposées à la courbe idéale, on a représenté sur cette figure les fonctions de directivité de la même antenne soumise à 9 perturbations différentes mais statistiquement équivalentes. On ne peut que constater la très forte dégradation qui en résulte. Enfin on a représenté également la formule théorique de la fonction de directivité moyenne. Cette dernière courbe donne une assez bonne approximation du niveau moyen des lobes secondaires.

On peut remarquer que la dégradation du niveau moyen des lobes secondaires est limitée par la quantité $\sum_k w_k^2$ qui est d'autant plus petite que la pondération est ambitieuse. Cette quantité est minimum pour la pondération uniforme. Dans le cas présent le piédestal « théorique » passe de -25.2 dB à -26.8 dB lorsque l'on passe de la pondération précédente (Gauss) à la pondération uniforme. La figure suivante représente les fonctions de directivité associées à une pondération uniforme, selon la même logique que dans la figure précédente.



La pondération uniforme est bien sûr moins ambitieuse (-13 dB de lobe secondaire maximum) et elle est beaucoup plus robuste aux distorsions. Sur la courbe moyenne on distingue encore fort bien la structure des lobes secondaires de la fonction de directivité non perturbée. C'est seulement lorsque le plateau est atteint (-26.8 dB) que la structure des lobes secondaires commence à s'estomper.

De même on pourra s'attendre à ce que le niveau du piédestal s'abaisse lorsque le nombre de capteurs augmente. On peut donc dire qu'un traitement d'antenne classique est d'autant plus robuste que le nombre de capteurs est grand. Une étude similaire dans le cas du filtre adapté spatial montrerait au contraire une plus grande sensibilité à l'augmentation du nombre de capteurs.

Exercice 15 : Lobe Image et incertitude sur la célérité des ondes

Une antenne rectiligne uniforme est conçue pour des ondes planes de célérité $C_0 = 1500m/s$.

Dans la pratique, C n'est pas connue exactement et peut varier entre $C_- = 1450m/s$ et $C_+ = 1550m/s$.

On demande quelle est la distance recommandée entre capteurs, pour une fréquence d'utilisation de $f = 750Hz$.

Il faut déterminer l'espacement entre capteurs de manière à éviter le phénomène de lobe image.

On sait que ce phénomène se produit dès que $d > \frac{\lambda}{2}$.

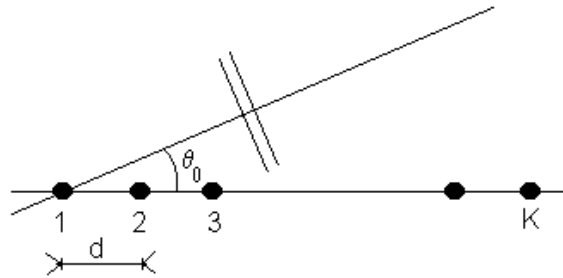
Il faut donc que $d < \frac{c}{2f}$ pour toutes les valeurs de c possibles.

La condition à imposer est donc $d < \frac{c_-}{2f} = \frac{1450}{2.750} = 0.97m$

Exercice 16 : Lobe Image et largeur de la fonction d'ambiguïté.

Soit une antenne linéaire uniforme constituée de $K = 32$ capteurs équidistants de d , plongée dans un milieu isocélère de célérité c .

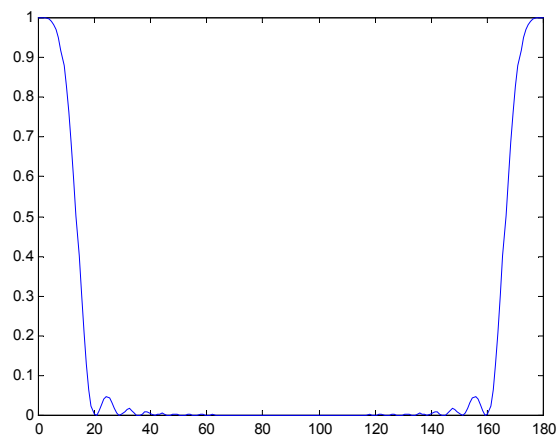
Cette antenne est « pointée » (traitement classique) dans la direction de son axe, vers l'avant, $\theta = 0$.



Lorsque d est exactement égal à une demi-longueur d'onde, à la fréquence f d'utilisation

$$d = \frac{\lambda}{2} = \frac{c}{2f}$$

le traitement possède un lobe image dans la direction arrière, $\theta = \pi$



La largeur du lobe image peut perturber notablement la réponse d'antenne, et il est intéressant de modifier d sans changer K de telle sorte que le lobe image soit le moins gênant possible.

Quelle valeur de d recommanderiez-vous pour ce faire ?

La fonction de directivité s'écrit de façon connue :

$$D(\theta, \theta_0) = \left[\frac{\sin(K\varphi/2)}{K \sin(\varphi/2)} \right]^2 = F e_{j_K}(\varphi/2)$$

avec $\varphi = \frac{2\pi d}{c}(\cos \theta - \cos \theta_0) f = \frac{2\pi d}{\lambda}(\cos \theta - \cos \theta_0)$

si $\theta_0=0$ on aura

$$D(\theta,0) = \left[\frac{\sin\left(K \frac{\pi d}{\lambda}(\cos \theta - 1)\right)}{K \sin\left(\frac{\pi d}{\lambda}(\cos \theta - 1)\right)} \right]^2$$

On cherche la plus grande valeur de d inférieure à $l/2$ telle que :

$$D(\pi,0) = 0$$

soit $\sin\left(2K \frac{\pi d}{\lambda}\right) = 0$ et on prendra d sous la forme : $d = \frac{\lambda}{2} - \varepsilon$

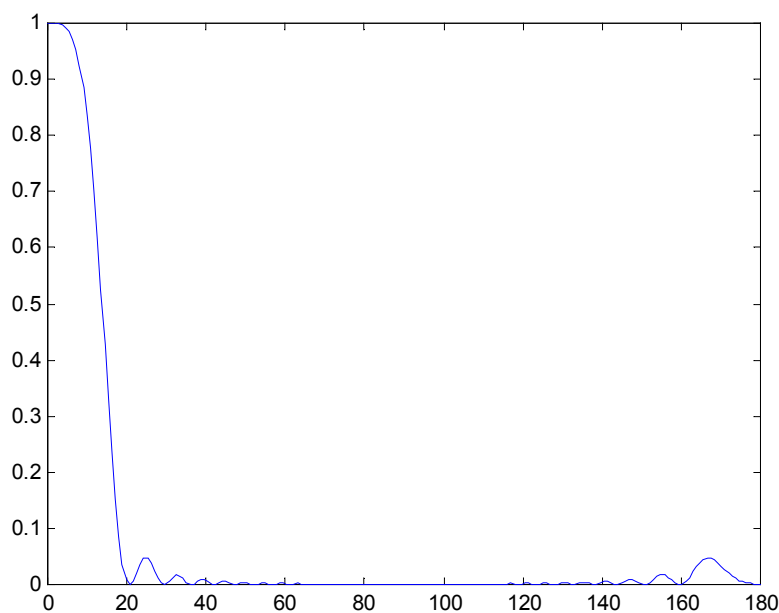
On trouve donc

$$2K\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{\lambda}\right) = K\pi - \frac{2K\pi\varepsilon}{\lambda} = (K-1)\pi$$

$$\frac{\varepsilon}{\lambda} = \frac{1}{2K} \Rightarrow \frac{d}{\lambda} = \frac{(K-1)}{2K}$$

c'est-à-dire $\frac{d}{\lambda} = 0.484$ Une valeur donc nettement inférieure au traditionnel 0.5.

On peut tracer le résultat pour cette valeur de d .



Si l'on veut prendre en compte une contrainte supplémentaire portant sur l'incertitude de la célérité de l'onde, comme dans l'exercice précédent, on trouvera plutôt :

$$\frac{d}{\lambda} = \frac{c_-}{c_0} \frac{K-1}{2K} = 0.468$$

Il sera même nécessaire de resserrer davantage les capteurs dans le cas d'une antenne pondérée, pour laquelle la largeur du lobe principal est augmentée.

La fonction de directivité s'écrit

$$\left| \sum_{k=1, K} w(k) \exp\left(2i\pi \frac{d}{\lambda} (k-1)(\cos\theta - \cos\theta_0)\right) \right|^2$$

Si par exemple on utilise une pondération triangulaire avec $K=2p$

$$w(k) = \frac{k}{p(p+1)} \quad \text{pour } k=1, \dots, p$$

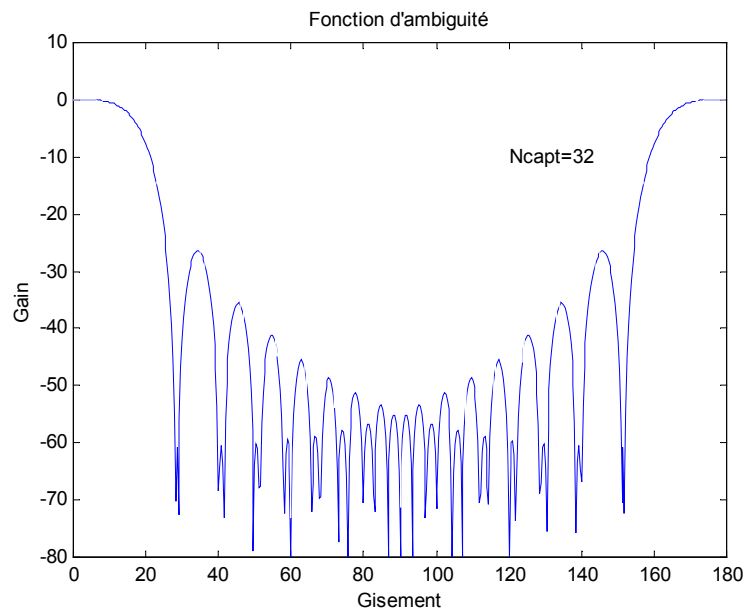
$$= w(K-k+1) \quad \text{pour } k > p$$

La fonction de directivité s'écrit

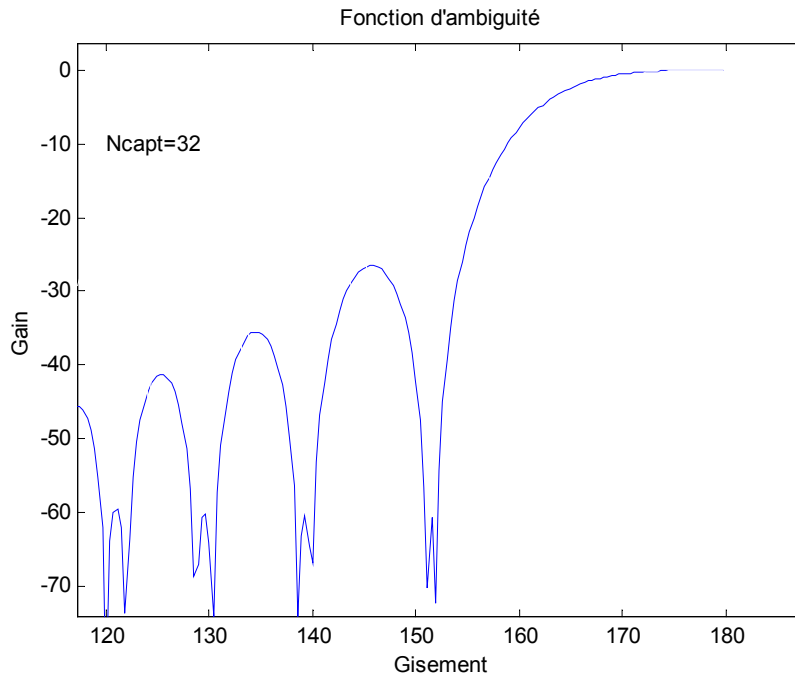
$$D(\theta, \theta_0) = Fej_p\left(\frac{\varphi}{2}\right) Fej_{p+1}\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

où $Fej_p(x) = \left(\frac{\sin(px)}{p \sin(x)}\right)^2$ et $\varphi = \frac{2\pi d}{\lambda} (\cos\theta - \cos\theta_0)$

Elle est représentée sur la figure suivante :



Sur la figure précédente on a superposé la fonction de directivité de l'antenne pondérée par un triangle et celle de l'antenne non pondérée. On constatera que, si l'on envisage d'utiliser le même écartement entre capteurs, le lobe résiduel arrière serait encore assez important (environ -8 dB, voir détail de la figure ci-dessous).



Si l'on s'intéresse aux zéros de la fonction de directivité, on devra avoir

$$\sin\left\{p \frac{\pi d}{\lambda} (\cos \theta - \cos \theta_0)\right\} = 0$$

ou bien
$$\sin\left\{(p+1) \frac{\pi d}{\lambda} (\cos \theta - \cos \theta_0)\right\} = 0$$

On s'intéresse à la situation où $\theta_0=0$, et il s'agit de trouver la première valeur de d/λ inférieure à 0.5 pour laquelle $\theta=\pi$ est un zéro de la fonction de directivité. On aura donc

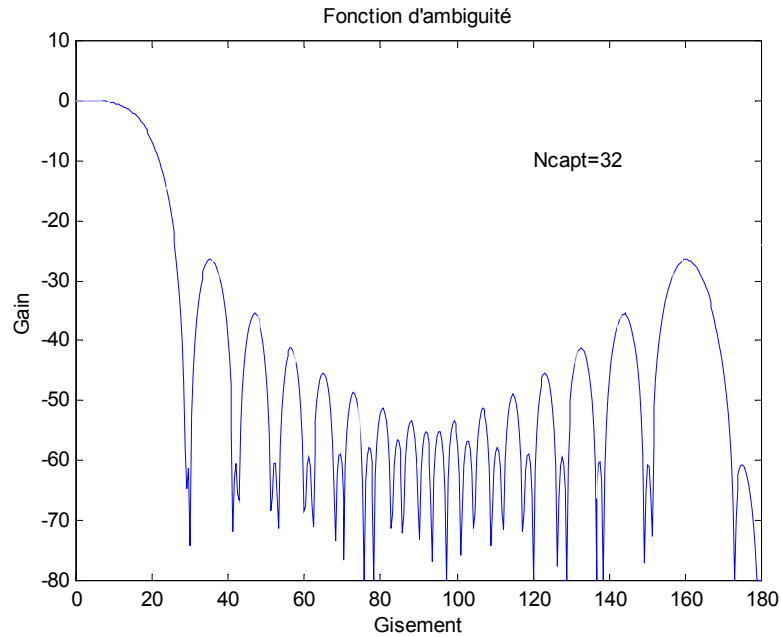
$$\cos \theta - \cos \theta_0 = -2$$

En écrivant que $\frac{d}{\lambda} = \frac{1}{2} - \varepsilon$, on cherche la plus petite valeur de ε pour laquelle

$$2(p+1)\pi \frac{d}{\lambda} = p\pi$$

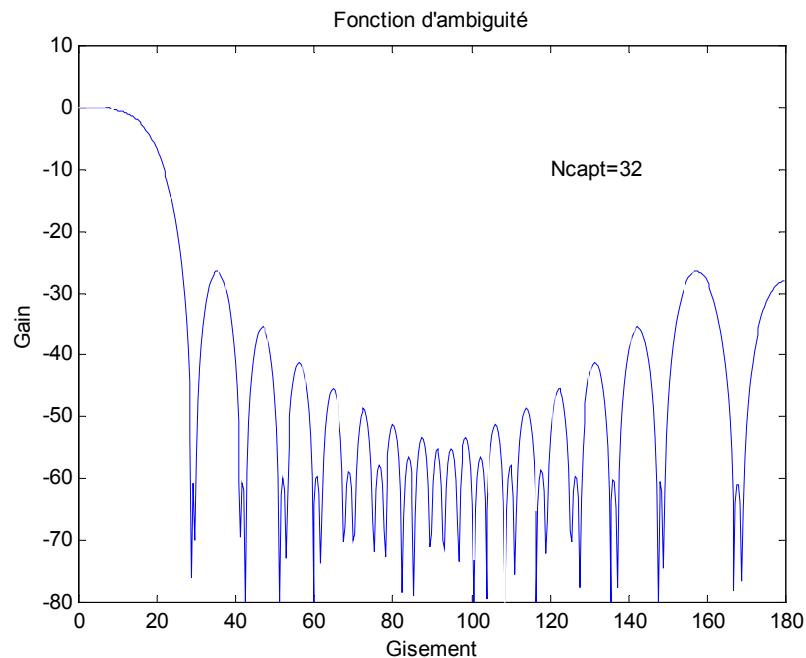
c'est-à-dire $\frac{d}{\lambda} = \frac{p}{2(p+1)} = 0.471$ pour $K = 32$.

Ce que l'on vérifie sur la fonction de directivité obtenue avec cette valeur de d .



En réalité on a pas besoin d'être aussi exigeant puisque le lobe secondaire dominant est égal à -26 dB . Ci-dessous, on donne le résultat pour $d/\lambda = 0.475$.

Si l'on veut se protéger contre une incertitude sur la célérité de 1450 m/s au lieu de 1500 m/s, comme dans l'exemple précédent, il faudra utiliser une valeur de $d/\lambda = 0.459$.

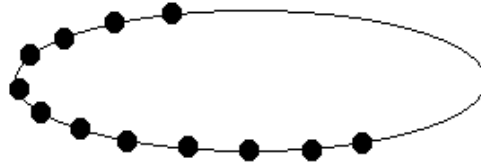


En conclusion : Pour une bonne protection contre l'effet des lobes images, un léger suréchantillonnage spatial est toujours souhaitable (de l'ordre de 10%).

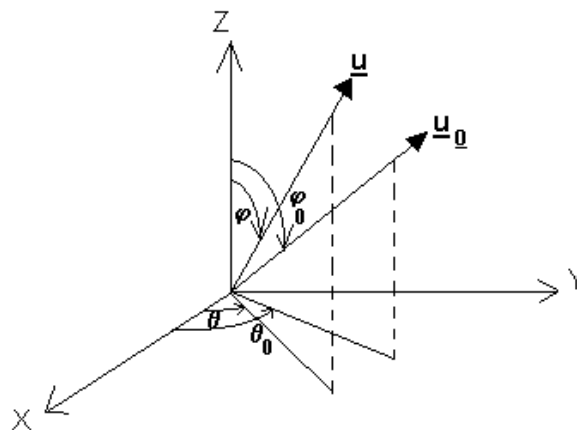
Exercice 17 : Antenne à symétrie circulaire

Connaissant l'expression mathématique de la fonction de directivité d'une antenne en forme de cercle (Traitement classique pour des ondes planes dans un milieu isocélère), soit :

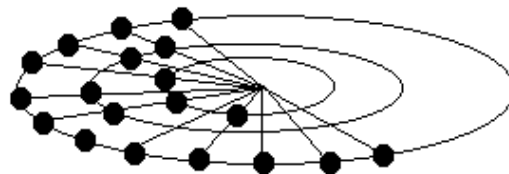
$$D(\theta, \theta_0, \varphi, \varphi_0)$$



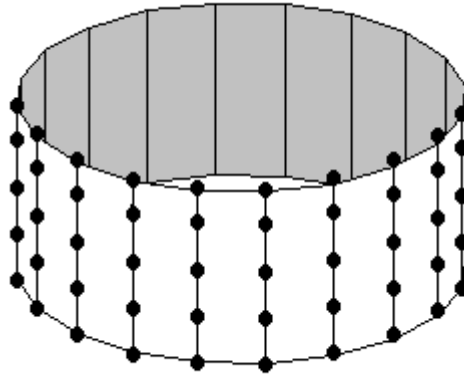
où θ, θ_0 désignent respectivement le gisement de la source et le gisement de consigne, et φ, φ_0 les sites correspondants, on demande quelle sera la forme d'antenne pour laquelle la fonction de directivité



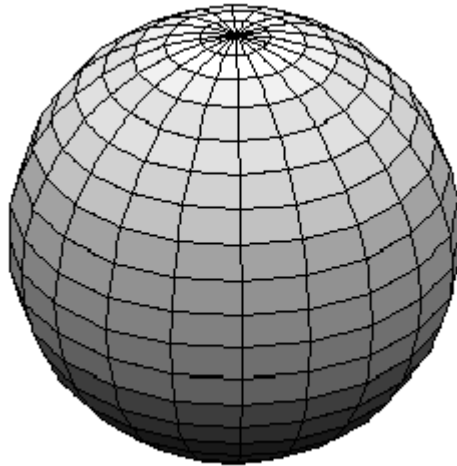
sera la plus simple à calculer à partir de celle du cercle : le disque ?



le cylindre ?



ou la sphère ?



Justifier la réponse.

Il est clair a priori que la fonction de directivité du cylindre sera très simple à calculer à partir de celle du cercle en appliquant le théorème connu sur la multiplication des fonctions de directivité (on peut considérer un cylindre comme un cercle d'antenne linéaire : le motif est une antenne linéaire et le réseau est un cercle).

On peut écrire immédiatement le résultat sous la forme :

$$D_{\text{cylindre}}(\theta, \theta_0, \varphi, \varphi_0) = D_{\text{cercle}}(\theta, \theta_0, \varphi, \varphi_0) D_{\text{linéaire}}\left(\frac{\pi H}{\lambda}(\cos \varphi - \cos \varphi_0)\right)$$

où H désigne la hauteur du cylindre

Si l'antenne est discrète, la fonction de directivité de l'antenne linéaire est une fonction de FEJER ; si elle est continue, il s'agit d'un sinus cardinal.

On peut même préciser la fonction de directivité du cercle (du moins si il est continu).

$$D_{\text{cercle}}(\theta, \theta_0, \varphi, \varphi_0) = J_0^2\left(\frac{2\pi R}{\lambda} \xi\right)$$

avec $\xi = \sqrt{\sin^2 \varphi + \sin^2 \varphi_0 - 2 \sin \varphi \sin \varphi_0 \cos(\theta - \theta_0)}$

En fait, ce qui est intéressant dans ce problème, c'est de rechercher les relations de symétrie pouvant simplifier les calculs des fonctions de directivité (comme c'est le cas pour la translation). En fait, la translation est le seul cas simple. Ni l'homothétie (à l'œuvre pour passer du cercle au disque), ni les rotations (éventuellement à l'œuvre pour passer du cercle à la sphère) ne fournissent de simplifications évidentes.

On peut d'ailleurs calculer explicitement les fonctions de directivité de ces antennes, lorsqu'elles sont continues. La fonction de directivité du disque plein fait intervenir celle du cercle mais indirectement, par intégration :

$$D_{\text{disk}}(\theta, \varphi, \theta_0, \varphi_0) = \left[\frac{2}{R^2} \int_0^R r J_0\left(\frac{2\pi r}{\lambda} \xi\right) dr \right]^2$$

Or, selon la propriété connue des fonctions de BESSEL, on a :

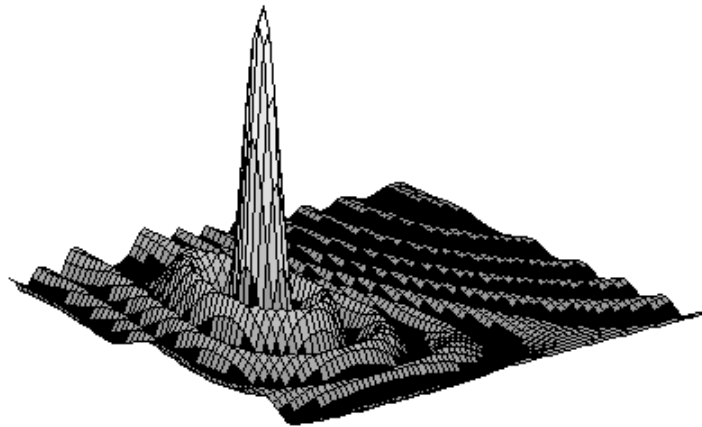
$$\int_0^X u J_0(u) du = X J_1(X)$$

La fonction de directivité du disque plein se simplifie donc en :

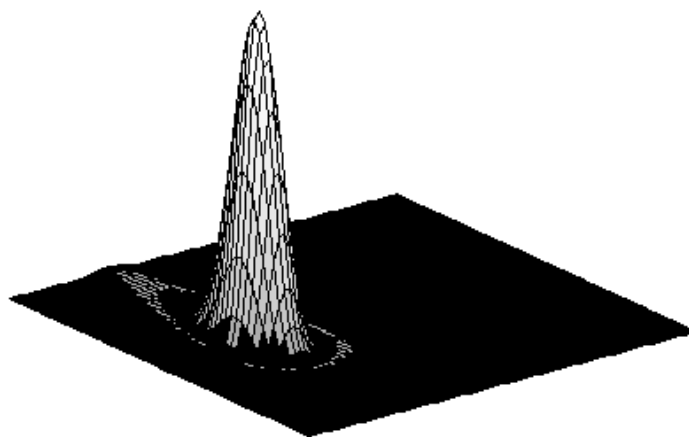
$$D_{\text{disk}}(\theta, \varphi, \theta_0, \varphi_0) = \left[\frac{2}{\left(\frac{2\pi R}{\lambda} \xi\right)} J_1\left(\frac{2\pi R}{\lambda} \xi\right) \right]^2$$

Il est donc clair que la connaissance de la fonction de directivité a été utile, mais cela a été plus indirect que pour le cylindre.

Par curiosité on a tracé la fonction de directivité du cercle et du disque sur les figures suivantes.



Cercle ci-dessus et disque ci-dessous.



Quant à l'antenne sphérique, il est également possible de calculer analytiquement la fonction de directivité. Cependant, le ressort du calcul est complètement différent et ne fait aucunement appel à l'expérience acquise avec le cercle.

Exercice 18 : Scalloping Loss

Soit une antenne linéaire à 17 capteurs équidistants de $\frac{\lambda}{2}$ pour la fréquence d'utilisation considérée.

On suppose que cette antenne fixe est utilisée pour faire de la surveillance panoramique, mais que, pour des raisons de coût, on ne puisse fabriquer que 19 filtres spatiaux permettant donc de surveiller 19 directions simultanées.

Si 0 dB est le niveau de référence des cibles détectables avec l'antenne pour des filtres spatiaux adaptés (bien « pointés »), il existe fatalement une perte de détection due à l'utilisation d'un nombre fini de voies.

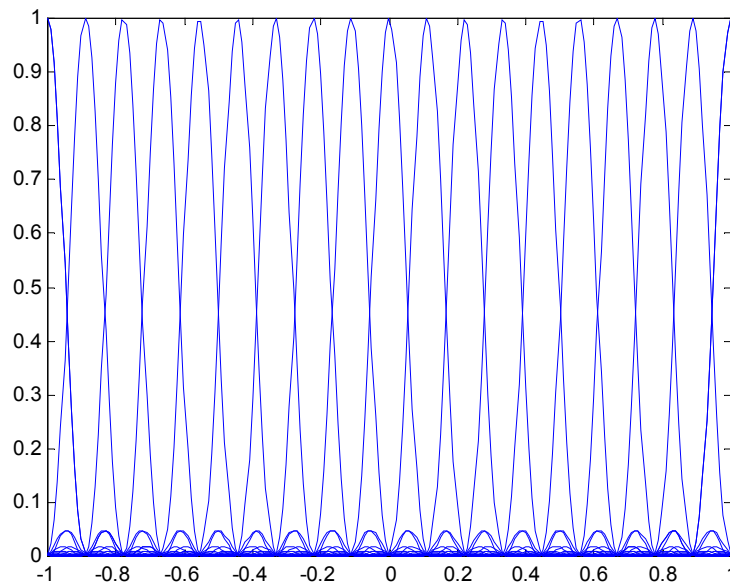
On demande la valeur de cette perte.

Les voies auront des directions de pointage équiréparties en $\cos(\theta)$.

L'écart entre voies sera de Δ tel que :

$$\Delta = \frac{2}{18}$$

le problème de la perte de détection est illustré sur la figure suivante :



On constatera sur cette figure que, pour détecter des sources situées exactement à mi-chemin entre deux voies adjacentes, il faut accepter une perte calculable à l'aide de la fonction de directivité :

$$D(\theta) = \left(\frac{\sin\left(K\pi \frac{d}{\lambda} (\cos(\theta) - \cos(\theta_0))\right)}{K \sin\left(\pi \frac{d}{\lambda} (\cos(\theta) - \cos(\theta_0))\right)} \right)^2$$

Dans le cas présent la perte sera de

$$D(\theta) = \left(\frac{\sin\left(17 \frac{\pi}{2} \frac{1}{18}\right)}{17 \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{18}\right)} \right)^2 = -3.45dB$$

Pour mémoire, cette perte est souvent appelée le « scalloping loss ».

Une façon de réduire cette perte est d'introduire une apodisation, qui augmente la largeur d'ambiguïté tout en réduisant le niveau des lobes secondaires. Cependant, le fait d'introduire une pondération d'antenne introduit une réduction du gain d'antenne et introduit un autre type de perte.

La réduction du gain d'antenne introduite par une pondération est donnée par le calcul usuel du gain d'antenne d'une antenne pondérée. Le filtre spatial correspondant à une antenne pondérée est :

$$\underline{H} = \frac{(\underline{W} \underline{d}_0)^*}{\underline{d}_0^+ \underline{W} \underline{d}_0}$$

Le gain d'antenne est donnée par :

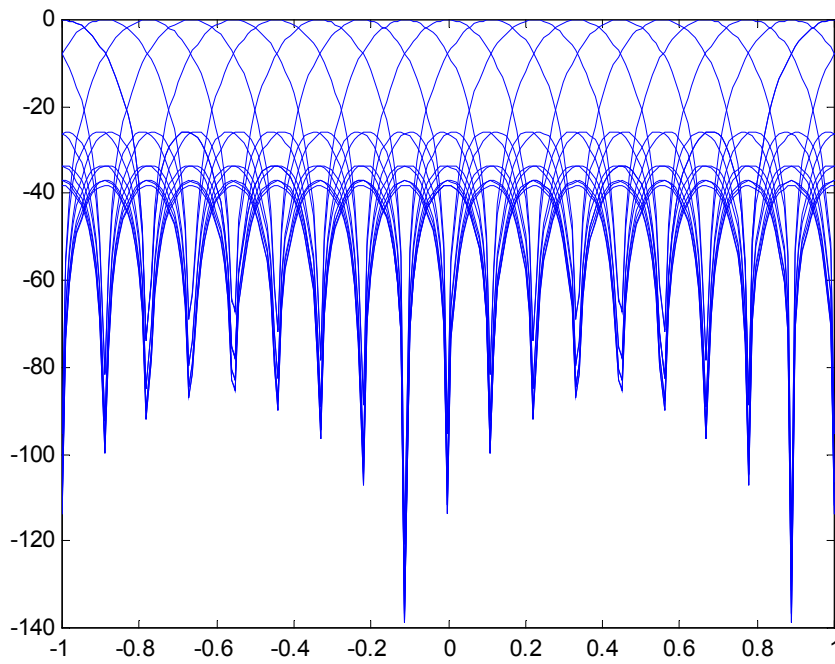
$$G = \frac{(\underline{d}_0^+ \underline{W} \underline{d}_0)^2}{\underline{d}_0^+ \underline{W}^2 \underline{d}_0}$$

Cette quantité est toujours inférieure à la valeur qu'elle peut atteindre pour $W=I$. Ceci se justifie par l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ : On en conclut que pondérer une antenne réduit son gain vis-à-vis d'un bruit incohérent.

$$|\underline{d}_0^+ \underline{W} \underline{d}_0|^2 \leq (\underline{d}_0^+ \underline{d}_0) (\underline{d}_0^+ \underline{W}^2 \underline{d}_0)$$

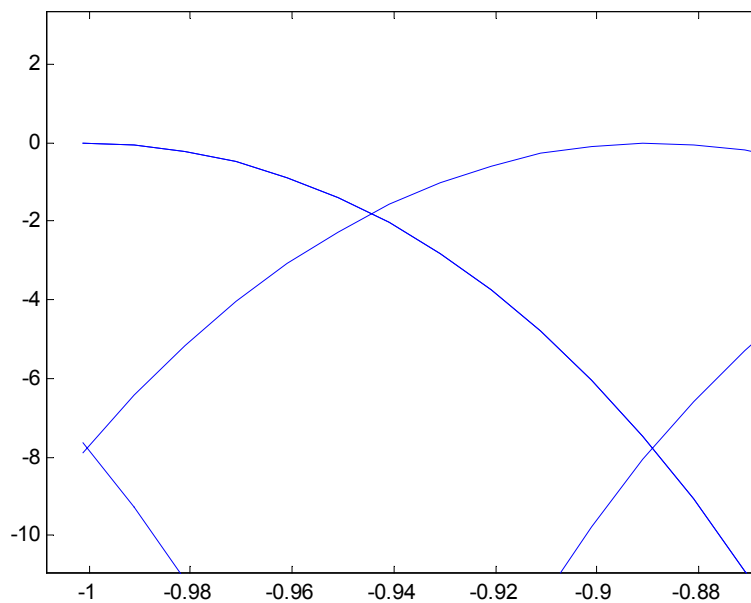
La perte de gain dépend de la pondération. A titre d'exemple, la pondération triangulaire introduit une perte de gain d'antenne 1 dB . A cette perte, on doit rajouter le scallop loss pour obtenir la perte totale maximale. On remarquera que le scallop loss est moins important que pour une antenne non pondérée, en raison de l'élargissement du lobe principal. La figure suivante illustre le phénomène. On constate que le scallop loss est inférieur à 1.8 dB, ce qui donne une perte cumulée de 2.8 dB bien inférieure aux 3.45 dB de l'antenne initiale.

On peut essayer de classer les pondérations vis-à-vis de ce critère de perte cumulée.



On peut évaluer le scallop loss par :

$$D(\theta) = \left(\frac{\sin(9 \frac{\pi}{2} \frac{1}{18})}{9 \sin(\frac{\pi}{2} \frac{1}{18})} \right)^4 = -1.8dB$$



Exercice 19 : Large-Bande

Soit une antenne linéaire à $K = 32$ capteurs équidistants de $d = 1\text{m}$ utilisée dans un milieu isocélère de célérité $c = 1500\text{ m/s}$.

On se propose de réaliser une veille panoramique à l'aide d'un ensemble de traitements classiques pointés dans différentes directions recouvrant tout l'espace.

Le mode de réalisation choisi est celui des déphasages. La fréquence nominale d'utilisation de l'antenne est $f = 600\text{Hz}$

On demande quelle est la plage maximale de fréquence dans laquelle la fonction de veille est réalisée correctement.

Pour réaliser une formation de voie dans une direction θ , il faut appliquer aux différents capteurs des retards :

$$\tau_k = \frac{(k-1)d}{c} \cos(\theta)$$

qui, à la fréquence f , correspondent à des déphasages :

$$\phi_k = 2\pi f (k-1) \frac{d}{c} \cos \theta$$

Entre la fréquence min et la fréquence max le déphasage varie de

$$2\pi \Delta f (k-1) \frac{d}{c} \cos \theta$$

$$\text{avec } \Delta f = f_{\max} - f_{\min}$$

La plage maximale de variation de ces déphasages est donc obtenue pour $k=K$ et $\theta=0$ ou π (EndFire) et vaut :

$$\Phi = 2\pi(K-1) \frac{d}{c} \Delta f = 2\pi \frac{D}{c} B$$

B est donc la bande spectrale de fonctionnement et $T=D/c$ est dénommé « Profondeur d'antenne », c'est le temps que met l'onde pour traverser l'antenne.

Pour être admissible, cette variation doit rester faible devant 2π , par exemple $\Phi < \frac{\pi}{4}$.

Avec cette condition, pour l'antenne considérée, on trouve $B < 12\text{ Hz}$.

En restreignant le secteur d'utilisation on peut accepter des bandes spectrales plus larges (la profondeur d'antenne est alors plus réduite). Par exemple, en réduisant la couverture à un secteur angulaire de 120 degrés autour de la direction transverse, la

profondeur d'antenne est réduite de moitié et la bande tolérable est donc multipliée par deux.

On pourrait cependant se poser le problème en termes quantitatifs plus précis :

Pourquoi prendre $\Phi < \frac{\pi}{4}$ plutôt que $\Phi < \frac{\pi}{2}$, par exemple ?

Pour étudier cette question nous allons tout d'abord examiner les propriétés de la fonction de directivité du filtre spatial construit avec des déphasages.

$$\underline{H} = \text{col} \left\{ \exp \left(2i\pi f_0 (k-1) \frac{d}{c} \cos \theta \right) \right\}$$

On obtient :

$$D(\theta, \theta_0, f, f_0) = \frac{1}{K^2} \left| \sum_{k=1, K} \exp(i(k-1)\varphi) \right|^2$$

avec : $\varphi = 2\pi \frac{d}{c} (f_0 \cos \theta_0 - f \cos \theta)$

Ce qui s'écrit : $D = \left\{ \frac{\sin(K\varphi/2)}{K \sin(\varphi)} \right\}^2$

Si $\theta = \theta_0$ alors $\varphi = \frac{2\pi d}{c} \cos \theta_0 \Delta f$

La perte de gain dans la direction d'observation est donc donnée par :

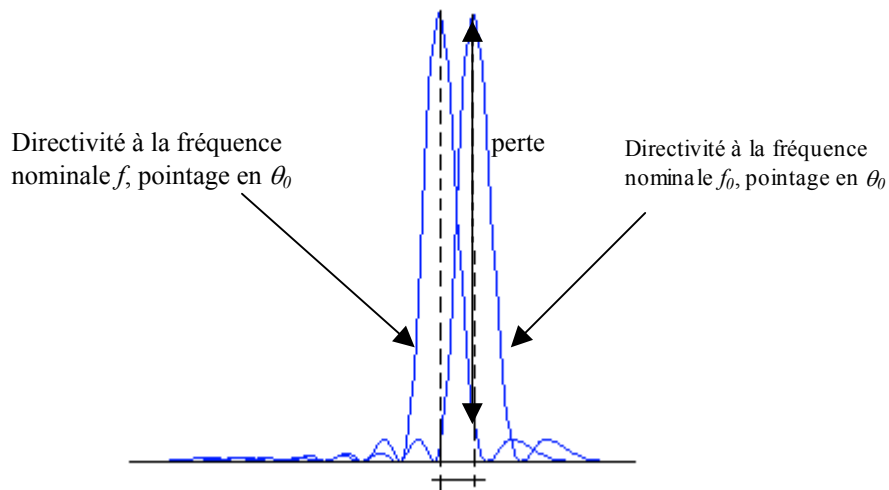
$$\left\{ \frac{\sin\left(\frac{K\pi d}{c} \Delta f \cos \theta\right)}{K \sin\left(\frac{\pi d}{c} \Delta f \cos \theta\right)} \right\}^2 = \text{Loss}$$

Pour $\theta = \theta_0 = 0$, $K=32$, $d=1$, $B=12\text{Hz}$ On trouve $\text{Loss} = -1 \text{ dB}$, très acceptable., en définissant comme « acceptable » une perte inférieure à 3 dB.

On peut expliquer un peu plus précisément l'origine de la perte de gain en examinant la fonction de directivité. Pour la géométrie d'antenne considérée ici la désadaptation en fréquence entraîne en fait un biais de pointage qui dépend de la fréquence (les voies « louchent ») :

$$b = \cos \theta - \cos \theta_0 = \left(\frac{f}{f_0} - 1 \right) \cos \theta = \frac{\Delta f}{f_0} \cos \theta$$

Le phénomène est symbolisé sur la figure suivante :



On peut éventuellement considérer qu'un tel biais est acceptable s'il est inférieur à θ_3 .

$$b = \frac{\Delta f}{f_0} \cos \theta < \theta_3 \cong 0.5 \frac{\lambda_0}{(K-1)d} = \frac{750}{31f_0}$$

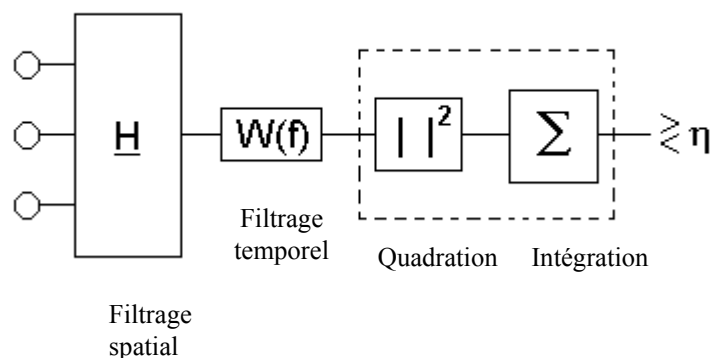
Soit $\Delta f < 24\text{Hz}$

L'utilisation de déphasages pour traiter les signaux d'une antenne linéaire est relativement anodine si les signaux restent à bande étroite, surtout dans un système panoramique pour lequel on fabrique des voies préformées dans « toutes » les directions. Il n'y aura pas de perte de détection (tout au plus une source pourra t'elle être détectée dans une direction adjacente à la direction réelle).

Par contre si les signaux sont large bande, les déphasages entraînent un étalement spatial de la source qui peut réduire les performances en détection.

Il est intéressant de calculer la bande optimale de détection en sortie d'une formation de voie par déphasage.

La structure d'une chaîne de détection large bande est donnée sur la figure suivante :



La variable de décision z sera supposée quasi Gaussienne. On peut donc caractériser les performances du récepteur par le « contraste » (rapport signal à bruit au sens statistique).

$$\left(\frac{S}{B}\right)_{out} = \frac{m_1 - m_0}{\sigma_0} = \frac{E\{z / H_1\} - E\{z / H_0\}}{(Var\{z / H_0\})^{1/2}}$$

Nous allons calculer ces quantités en supposant que l'observation est stationnaire, centrée, Gaussienne, et caractérisée par les matrices interspectrales :

$$\begin{aligned} \Gamma &= \Gamma_0 = \sigma I && \text{dans l'hypothèse } H_0. \\ \Gamma &= \Gamma_1 = \sigma I + \gamma \underline{d} \underline{d}^+ && \text{dans l'hypothèse } H_1. \end{aligned}$$

On a alors :

$$z = \sum_{k=1, N} \sum_{l=1, M} |W(f_l) \underline{X}_k^+(f_l) \underline{H}^*(f_l)|^2$$

Expression dans laquelle l'indice k porte sur le temps et l'indice l sur la fréquence. La moyenne de z s'écrit :

$$E\{z\} = N \sum_{l=1, M} |W(f_l)|^2 \underline{H}^T(f_l) \Gamma(f_l) \underline{H}^*(f_l)$$

En utilisant l'hypothèse de stationnarité. On obtient donc :

$$m_1 - m_0 = NM \left\langle |W(f)|^2 \gamma(f) \left| \underline{H}^T(f) \underline{d}(f) \right|^2 \right\rangle$$

En utilisant la notation : $\langle G \rangle = \frac{1}{B} \int_B G(f) df$ Le produit NM est égal au produit BT .

Pour calculer $Var\{z / H_0\}$, il faut calculer :

$$E\{z^2 / H_0\} = \sum_{k, l} \sum_{k', l'} |W(l)|^2 |W(l')|^2 E\left\{ \underline{H}^T(l) \underline{X}_k(l) \underline{X}_k^+(l) \underline{H}^*(l) \underline{H}^T(l') \underline{X}_{k'}(l') \underline{X}_{k'}^+(l') \underline{H}^*(l') \right\}$$

Cette quantité fait intervenir les moments d'ordre 4 de variables Gaussiennes, de la forme : $E\{\underline{X} \underline{X}^+ \underline{A} \underline{Y} \underline{Y}^+\}$
Quantités dûment répertoriées dans la littérature, que l'on peut exprimer à l'aide des seules covariances sous la forme :

$$\Gamma_{XX} \underline{A} \Gamma_{YY} + \Gamma_{XY} Tr\{\underline{A} \Gamma_{YX}\}$$

avec $\Gamma_{XX} = E\{\underline{X}\underline{X}^+\}$, $\Gamma_{YY} = E\{\underline{Y}\underline{Y}^+\}$, $\Gamma_{XY} = E\{\underline{X}\underline{Y}^+\}$ et $\Gamma_{YX} = E\{\underline{Y}\underline{X}^+\}$

Ceci conduit au résultat :

$$E\{z^2 / H_0\} = (E\{z / H_0\})^2 + \sum_k \sum_l |W(l)|^4 \left(\underline{H}^T(l) \Gamma(l) \underline{H}^*(l) \right)^2$$

En utilisant l'hypothèse que deux canaux spectraux ne sont pas corrélés. Cela s'écrit finalement :

$$Var\{z / H_0\} = NM \left\langle |W(f)|^4 \sigma^2(f) \|\underline{H}(f)\|^4 \right\rangle$$

Et le rapport signal à bruit qui nous intéresse s'écrit aussi :

$$\left(\frac{S}{B} \right)_{out} = \sqrt{BT} \frac{\left\langle |W|^2 \gamma |\underline{H}^+ \underline{d}|^2 \right\rangle}{\left(\left\langle |W|^4 \sigma^2 \|\underline{H}\|^4 \right\rangle \right)^{1/2}}$$

Dans le cas qui nous occupe ici, $\|\underline{H}\|=1$. Par ailleurs le filtre W utilisé est généralement le filtre « blanchisseur » de bruit $|W|^2 = \sigma^{-1}$.

Il reste donc : $\left(\frac{S}{B} \right)_{out} = \sqrt{BT} \left\langle \frac{\gamma}{\sigma} |\underline{H}^+ \underline{d}|^2 \right\rangle$

On en déduit la bande qui optimise cette quantité.

$$B_{opt} = \max_B^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{B}} \int_{f_{min}}^{f_{max}} \left(\frac{\gamma}{\sigma} \right) \left(\frac{\sin(K\varphi/2)}{K \sin(\varphi/2)} \right)^2 df \right\}$$

avec $\varphi = 2\pi \frac{d}{c} (f_0 \cos \theta_0 - f \cos \theta)$

Pour $\theta = \theta_0$, $\varphi = 2\pi \frac{d}{c} \cos \theta_0 (f_0 - f)$ et donc :

$$B_{opt} = \max_B^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{B}} \int_{-B/2}^{+B/2} \left(\frac{\sin\left(\frac{K\pi d}{c} u\right)}{K \sin\left(\frac{\pi d}{c} u\right)} \right)^2 du \right\}$$

En supposant $\frac{\gamma}{\sigma}$ constant dans la bande et $\cos \theta = 1$.

En utilisant une approximation parabolique de la fonction de directivité

$$\frac{\sin(Kx)}{K \sin(x)} \cong \frac{Kx - \frac{1}{6} Kx(Kx)^2}{Kx - \frac{1}{6} Kx(x)^2} \cong 1 - \frac{1}{6} (K^2 - 1)x^2 \quad \text{avec } x = \frac{\pi d}{c} u$$

l'intégrale se met alors sous la forme approchée :

$$\frac{1}{\sqrt{B}} \int_{-B/2}^{+B/2} \left[1 - \frac{1}{6} (K^2 - 1) \left(\frac{\pi d}{c} \right)^2 u^2 \right]^2 du = \frac{B - 2 \frac{K^2 - 1}{6} \left(\frac{\pi d}{c} \right)^2 \frac{1}{3} 2 \frac{B^3}{8}}{\sqrt{B}}$$

Cette quantité est maximale pour :

$$\frac{1}{2} B^{-1/2} - \frac{K^2 - 1}{3} \left(\frac{\pi d}{c} \right)^2 \frac{5}{24} B^{3/2} = 0$$

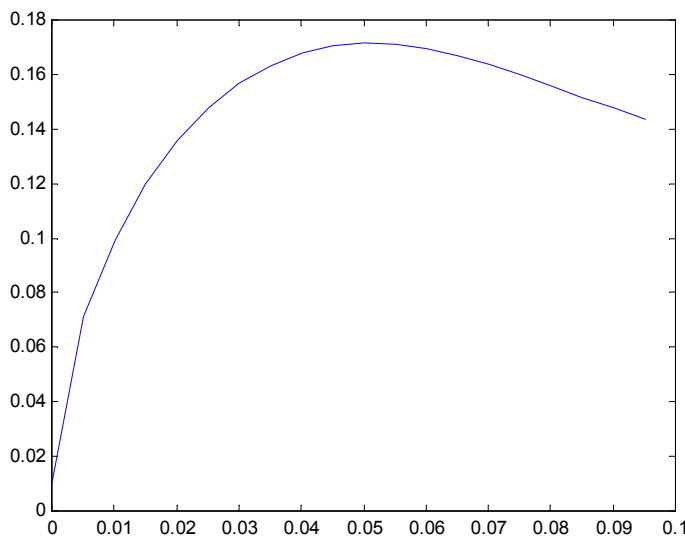
soit encore :
$$B^2 = 7.2 \left(\frac{c}{\pi d} \right)^2 \frac{1}{K^2 - 1} = 40 \text{ Hz}$$

Cependant, dans ce cas on a : $\frac{\pi d}{c} K \frac{B}{2} \cong 75^\circ$ et on ne peut pas considérer l'approximation parabolique comme très raisonnable pour le numérateur.

La fonction

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha B / 2}} \int_0^{\alpha B / 2} \left(\frac{\sin(Ku)}{K \sin(u)} \right)^2 du$$

pour $\alpha = \frac{\pi d}{c}$ et $K=32$ admet un maximum pour $\alpha B / 2 = 0.05$ et donc $B = 48 \text{ Hz}$.



Ce que montre la représentation graphique de la fonction ci-dessus.

Exercice 20 : Effet du mouvement propre de l'antenne

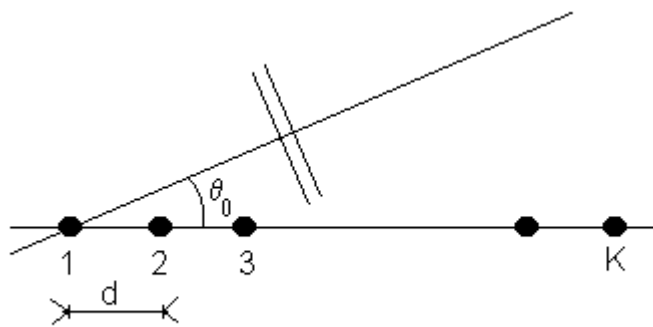
Une antenne rectiligne uniforme est plongée dans un milieu isocélère de célérité $c = 1500 \text{ m/s}$.

Cette antenne est constituée de $K = 32$ capteurs équidistants de $d = 1 \text{ m}$, et elle est utilisée à la fréquence $f = 750 \text{ Hz}$.

Cette antenne est remorquée selon son axe à la vitesse $v = 10 \text{ m/s}$ par rapport au milieu de propagation.

Dans ce milieu se propage une onde en provenance d'une source dans une certaine direction.

Le gisement de cette source, mesuré par l'antenne en utilisant un traitement qui ne tient pas compte du mouvement, est $\theta_m = 180^\circ$.

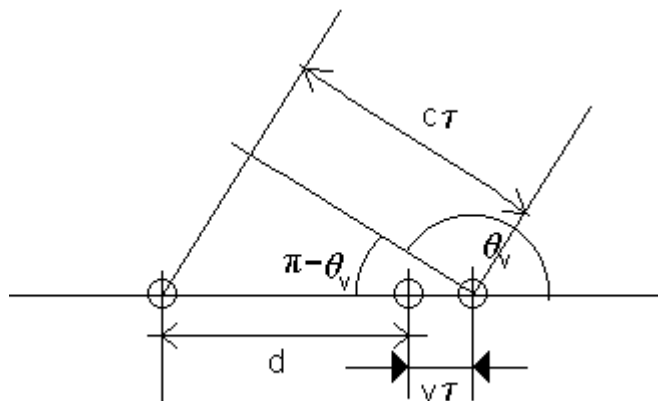


On demande le gisement réel de la source.

L'onde provient de la direction axiale arrière ; la vitesse apparente de l'onde est donc plus faible que c et de l'ordre de $c-v$. Si le traitement suppose que la vitesse de l'onde est exactement c , il aura tendance à surestimer le retard et donc $\theta_{mes} > \theta_{vrai}$.

Pour quantifier le résultat :

Soit θ_{vrai} le gisement réel de la source. Le retard entre 2 capteurs successifs du passage de l'onde est une quantité τ telle que :



$$-(d + v\tau)\cos\theta_v = c\tau$$

$$(c + v\cos\theta_v)\tau = -d\cos\theta_v$$

$$\tau = -\frac{d\cos\theta_v}{c + v\cos\theta_v}$$

Or on sait que cette dernière quantité est égale à d/c (gisement 180 degrés).
Ceci donne la valeur du gisement vrai :

$$\cos\theta_v = -\frac{1}{1 + \frac{v}{c}} = -0.9933775$$

$$\theta_v = 173^\circ,40235$$

D'une façon plus générale, le gisement apparent est lié au gisement réel par la formule plus générale :

$$\cos\theta_v = \frac{\cos\theta_a}{1 - \frac{v}{c}\cos\theta_a}$$

Conclusion : Le mouvement introduit un biais dans la mesure du gisement. Dans la direction axiale avant, on est même amené à localiser la source dans l'espace virtuel (gisements imaginaires, avec cosinus supérieur à l'unité).

Exercice 21 : Focalisation

Une antenne linéaire, de longueur $L = 50$ m, à capteurs équidistants, est utilisée pour faire de la veille panoramique à la fréquence $f = 4500$ Hz, dans un milieu homogène (isocélère) de célérité $c = 1500$ m/s.

La détection de sources très faibles nécessite de considérer qu'elles pourront n'être détectables qu'à l'intérieur de la zone de FRESNEL.

Il faudra donc concevoir, outre les directions de pointage (usuelles en veille panoramique), des « distances » de pointage (ou de focalisation).

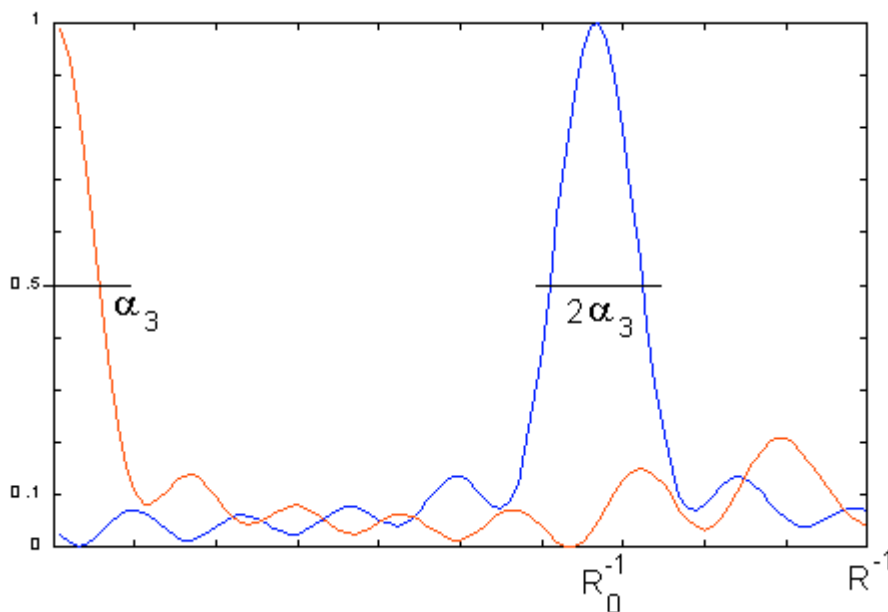
On demande le nombre de distances nécessaires pour assurer une couverture complète (à 3 dB près), entre 300 m et l'infini.

Pour répondre rapidement à cette question il suffit de calculer combien de « voies » sont comprises entre 300 m et l'infini, c'est-à-dire :

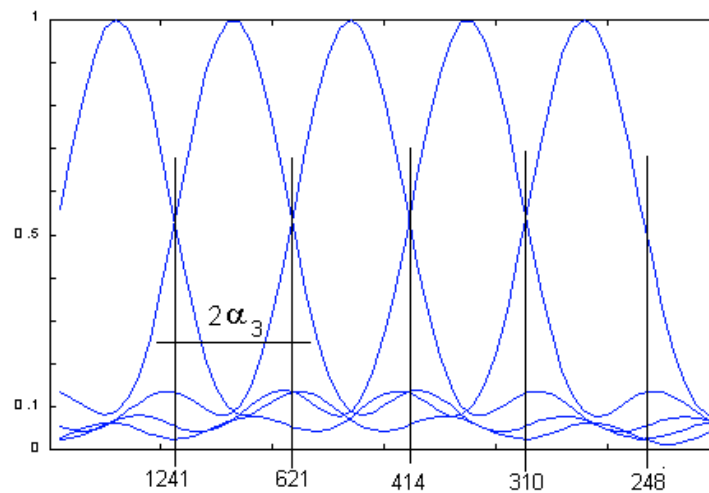
$$\frac{\left(\frac{1}{300} - \frac{1}{\infty}\right)}{2\alpha_3} \cong \frac{(1/300)}{\frac{6\sqrt{10}}{\pi} \frac{\lambda}{L^2}} = 4.1$$

On a $2\alpha_3 = 8.053 \cdot 10^{-4}$

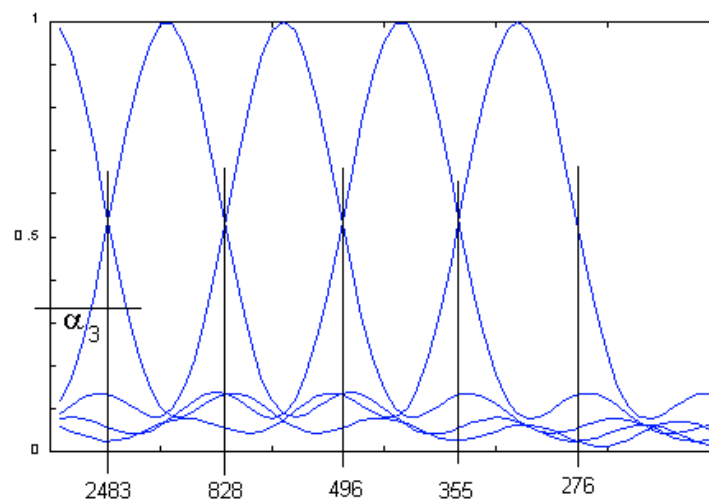
La figure qui suit représente la fonction de directivité en fonction de la distance inverse qui est le paramètre naturel, plutôt que la distance non inversée.



La figure suivante illustre la manière dont 5 « couches » en distance seront nécessaires pour assurer une couverture complète jusqu'à la distance spécifiée (option 1) :



Dans pratique une répartition un peu plus réaliste des couches en distance utilise une voie à l'infini (non focalisée) selon la figure suivante (option 2) :



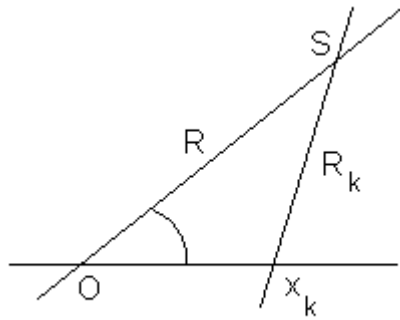
5 couches sont donc nécessaires: une voie à l'infini et 4 voies focalisées respectivement à 1241, 621, 414 et 310 m.

En réalité la formule donnée plus haut pour la profondeur de champ $2\alpha_3$ est un peu optimiste. Elle résulte d'une approximation parabolique de la forme du lobe principal de la fonction de directivité. Nous allons profiter de cet exercice pour en faire un calcul un peu plus précis.

Le vecteur source est donné par :

$$[d(\theta, R)]_k = \exp(2i\pi f \tau_k(\theta, R))$$

$$\tau_k(\theta, R) = \frac{R_k - R}{c}$$



$$R_k = \{R^2 + x_k^2 - 2Rx_k \cos \theta\}^{1/2}$$

$$R_k - R \cong -x_k \cos \theta + \frac{x_k^2}{2R} \sin^2 \theta$$

Il s'agit de calculer

$$\underline{d}^+(\theta_0, R_0) \underline{d}(\theta, R) = \sum_k \exp \left\{ i\omega \left(\frac{R_k - R}{c} - \frac{R_k^0 - R^0}{c} \right) \right\}$$

que l'on peut approcher par :

$$\int_{-L/2}^{+L/2} \exp \left\{ \frac{2i\pi}{\lambda} \left(-x(\cos \theta - \cos \theta_0) + \frac{x^2}{2} \left(\frac{\sin^2 \theta}{R} - \frac{\sin^2 \theta_0}{R_0} \right) \right) \right\} dx$$

Si l'on s'intéresse uniquement à $\theta = \theta_0 = \frac{\pi}{2}$, on obtient l'expression de la fonction d'ambiguïté en distance :

$$\frac{1}{L^2} \left| \int_{-L/2}^{+L/2} \exp \left(\frac{2i\pi}{\lambda} \frac{x^2}{2} (R^{-1} - R_0^{-1}) \right) dx \right|^2$$

On pose $u = \left(\frac{\pi}{\lambda} (R^{-1} - R_0^{-1}) \right) x$, (si $R < R_0$, voir plus loin).

L'expression de la fonction d'ambiguïté s'écrit alors :

$$\frac{4}{L^2} \frac{1}{\frac{\pi}{\lambda} (R^{-1} - R_0^{-1})} \left| \int_0^{\frac{L}{2} \left(\frac{\pi}{\lambda} (R^{-1} - R_0^{-1}) \right)^{1/2}} \exp(iu^2) du \right|^2 = \left| \frac{F(X)}{X} \right|^2$$

où $F(X)$ désigne l'intégrale de FRESNEL, une fonction spéciale définie par :

$$F(X) = \int_0^X \exp(iu^2) du$$

$$\text{et } X = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{D_F}{R} - \frac{D_F}{R_0} \right)^{1/2} \right)$$

Si $R > R_0$, on trouvera le même résultat en valeur absolue.

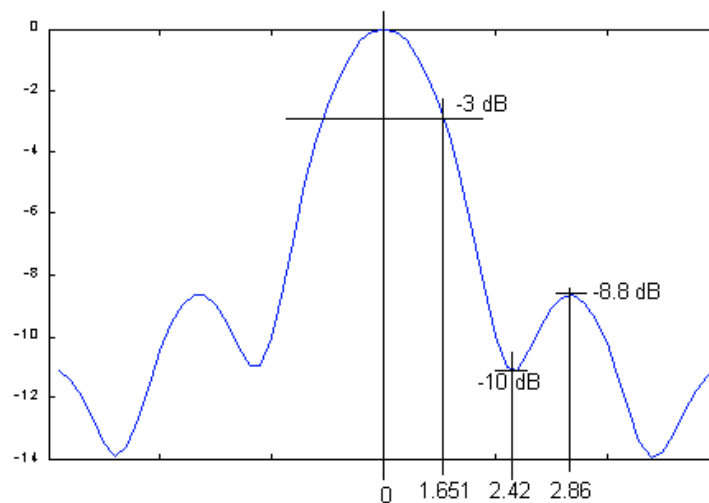
La fonction $G(R, R_0) = \left(\frac{F(X)}{X} \right)^2 = G(X)$ est égale à $\frac{1}{2}$ pour $X=1.65086$.

D'où la valeur de la profondeur de champ : $\alpha_3 = \frac{3.47}{D_F}$, où $D_F = \frac{L^2}{\lambda}$ désigne la distance de FRESNEL. On trouve alors :

$$\frac{1/300}{2(3.47)} D_F = \frac{25}{6.94} = 3.6$$

et les distances de transitions sont 2161, 720, 432, 309 pour, respectivement α_3 , $3\alpha_3$, $5\alpha_3$, $7\alpha_3$ selon la philosophie numéro 1 ; ou bien ∞ , 1080, 540, et 360 pour 0, $2\alpha_3$, $4\alpha_3$, $6\alpha_3$, selon la philosophie numéro 2.

La figure suivante représente une forme un peu plus précise de la fonction d'ambiguïté en distance inverse.



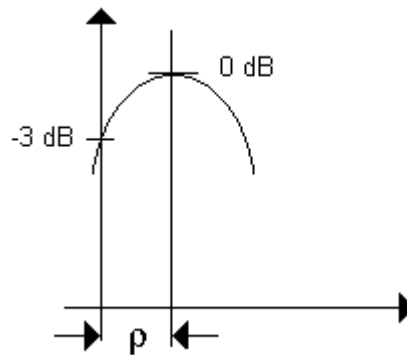
On voit sur cette figure que, pour réduire les effets des sources lointaines (et encore, de 10 dB seulement), il faut focaliser l'antenne à une distance telle que :

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{D_F}{R_0} \right) = 2.42$$

On trouve $R_0=1000 \text{ m}$.

Certains auteurs (cf. STEINBERG) ont utilisé le terme de « distance hyperfocale » pour désigner la distance à laquelle il faut focaliser une antenne de manière à atténuer l'infini de 3 dB.

La distance hyperfocale est donc donnée par la quantité ρ telle que :



$$X = 1.651 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{D_F}{\rho} \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{\pi D_F}{4\rho}}$$

d'où :

$$\rho = \frac{\pi}{4(1.651)^2} D_F = \frac{D_F}{3.47} = \alpha_3^{-1}$$