

EXERCICES CORRIGÉS

Traitement Spatial

DEA *SICOM* 2001

Un à dix..

TABLE DES MATIÈRES

<i>Avertissement</i>	3
Exercice 1 : Lobe secondaire d'une antenne apodisée	4
Exercice 2 : Largeur du lobe principal en endfire	10
Exercice 3 : Filtre SAW et traitement d'antenne	12
Exercice 4 : Antenne en champ proche	14
Exercice 5 : Valeur propre et détection	17
Exercice 6 : Fonction d'ambiguïté d'une antenne réseau linéaire périodique	23
Exercice 7 : Propriété spatiale de la densité spectrale croisée	26
Exercice 8 : Multiplication des diagrammes de directivité	28
Exercice 9 : Interpolation de SHANNON tronquée	38
Exercice 10 : Cohérence spatiale d'un bruit isotrope sphérique	44

Avertissement

Les exercices proposés ci-après sont d'intérêts et de difficultés très variables. Les corrigés proposés sont plutôt des petits extraits de cours commentés. Ils sont souvent l'occasion de digressions plus ou moins éloignées de la question initiale. Certains développements et courbes ont nécessité l'usage d'un calculateur qui ne serait pas forcément disponible en situation réelle d'examen.

Bien que dénommés « Exercices » il s'agit en fait d'une autre façon de voir un cours de traitement d'antenne de manière un peu plus appliquée.

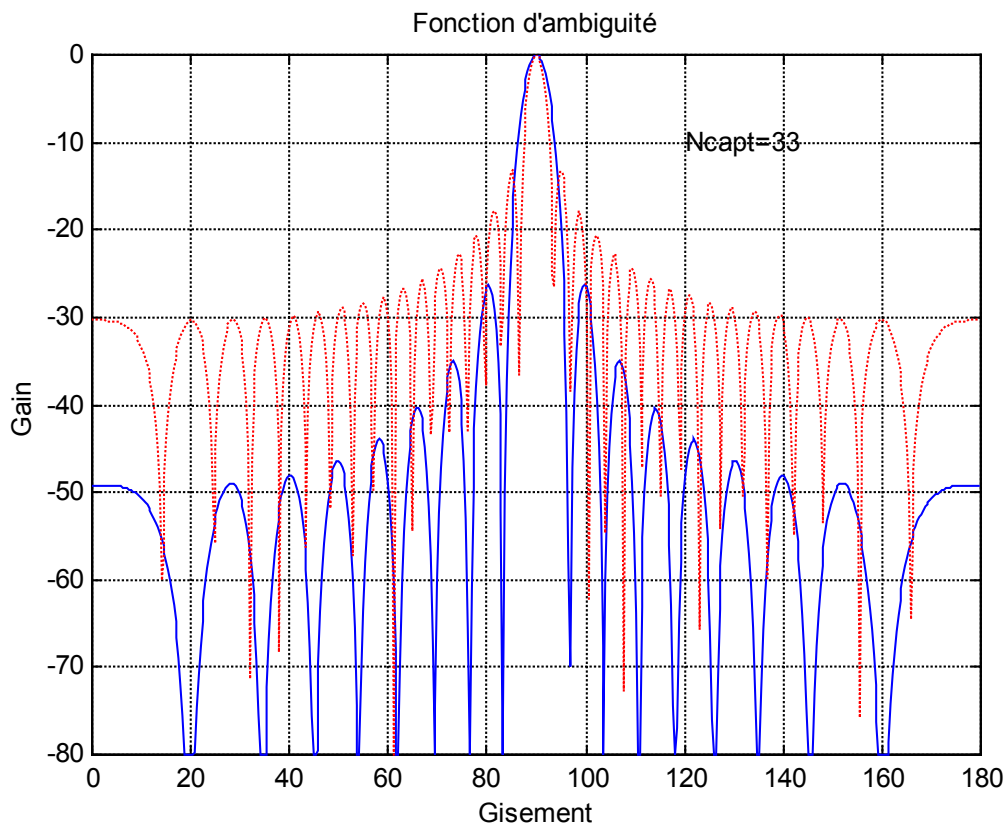
Exercice 1 : Lobe secondaire d'une antenne apodisée

On a une antenne linéaire périodique utilisant un traitement classique pondéré selon une loi triangulaire, et l'on se demande quel est le niveau du troisième lobe secondaire.

Il est bien entendu possible de répondre à cette question en explicitant le calcul de la fonction d'ambiguïté. Nous le ferons d'ailleurs en détail par la suite. Mais une réponse rapide à la question posée peut être obtenue en faisant simplement la remarque qu'une pondération triangulaire résulte de la convolution de 2 créneaux de longueur moitié, et que la fonction de directivité d'une antenne linéaire n'est rien d'autre qu'une transformée de FOURIER. La fonction d'ambiguïté d'un créneau étant donnée par une fonction de FEJER, on en conclura que la pondération triangulaire donne lieu à des lobes secondaires 2 fois moins élevés (en dB). Le niveau du troisième lobe secondaire est donc de l'ordre de

$$\left(\frac{2}{7\pi}\right)^4 \approx \frac{16}{2500 * 100} = \frac{64}{1000000}$$

En dB, ceci donne environ -42 dB de réjection qu'on obtient très facilement (Dénominateur -60 dB numérateur 18 dB).



On vérifiera le résultat par programmation, comme le montre la figure ci-dessus.

Le calcul explicite de la fonction d'ambiguïté peut se faire de la façon suivante
On exprimera tout d'abord la loi de pondération sous la forme :

$$w(k) = 1 - \frac{2 \left| k - \frac{K+1}{2} \right|}{(K+1)}$$

L'indice k varie de 1 à K. la fonction d'ambiguïté se calcule par :

$$D(u) = \left| \underline{H}^T \underline{d} \right|^2 = \frac{\left| \sum_{k=1,K} w(k) \exp(2i\pi(k-1)\frac{d}{\lambda}u) \right|^2}{\left(\sum_{k=1,K} w(k) \right)^2}$$

Le calcul peut se faire très simplement en utilisant les propriétés de la convolution qui sont rappelées ci-après. On peut aussi faire le calcul direct.

Convolution de deux lois de pondération

On peut définir précisément la convolution de deux pondérations « p » et « q » par la formule suivante :

$$w(n) = \sum_{k=1, K} p(k)q(n+1-k) = p * q(n)$$

l'indice n parcourant l'ensemble des nombres entiers de 1 à K+L-1.

La fonction de directivité associée est donnée par la formule :

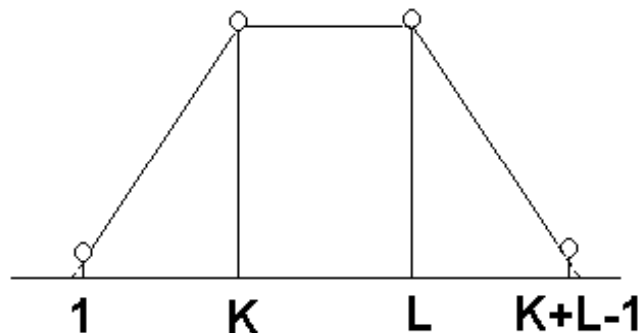
$$W(u) = \left| \sum_{n=1, K+L-1} w(n) \exp\left(2i\pi \frac{d}{\lambda} (n-1)u\right) \right|^2$$

On peut la relier facilement aux fonctions de directivité des pondérations dont elle est la convolution par :

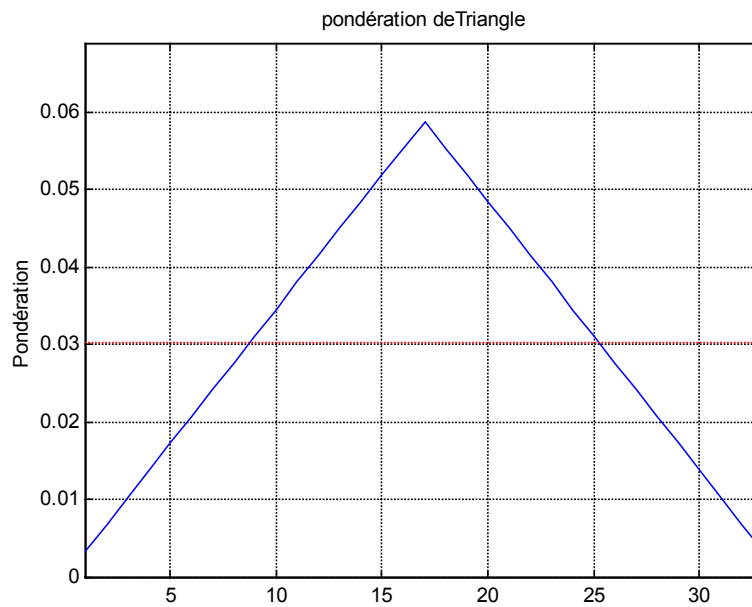
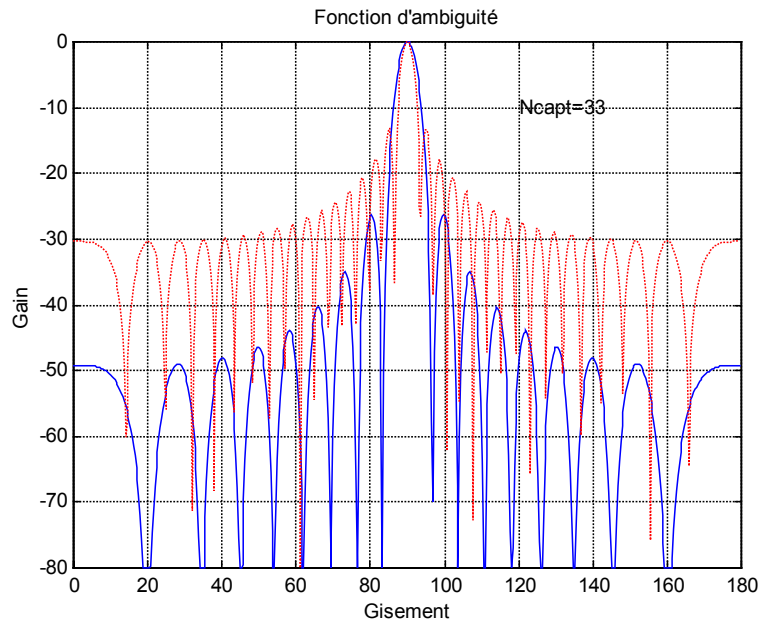
$$\begin{aligned} W(u) &= \left| \sum_{n=1, K+L-1} \exp\left(2i\pi \frac{d}{\lambda} (n-1)u\right) \sum_{k=1, K} p(k)q(n+1-k) \right|^2 \\ &= \left| \sum_{k=1, K} p(k) \sum_{l=1, K} q(l) \exp\left(2i\pi \frac{d}{\lambda} (k-l)u\right) \right|^2 \\ &= P(u)Q(u) \end{aligned}$$

La fonction de directivité de la convolution de deux pondérations est le produit de leurs fonctions de directivité. Ce résultat n'est, bien entendu, qu'un cas particulier du théorème sur la transformée de FOURIER d'une convolution.

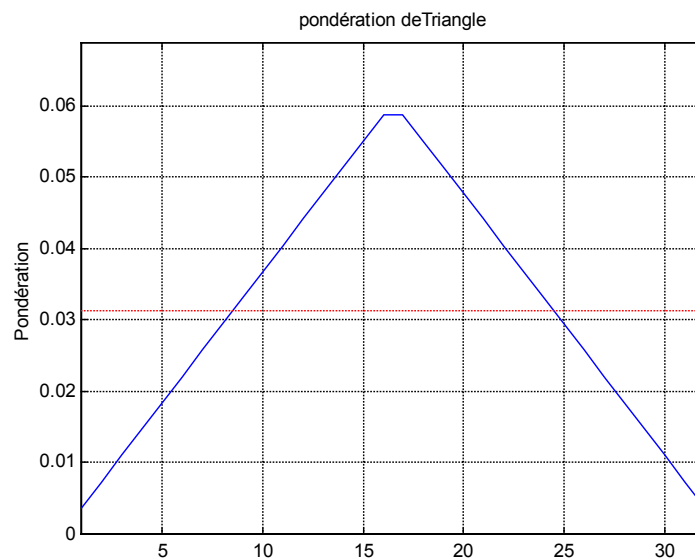
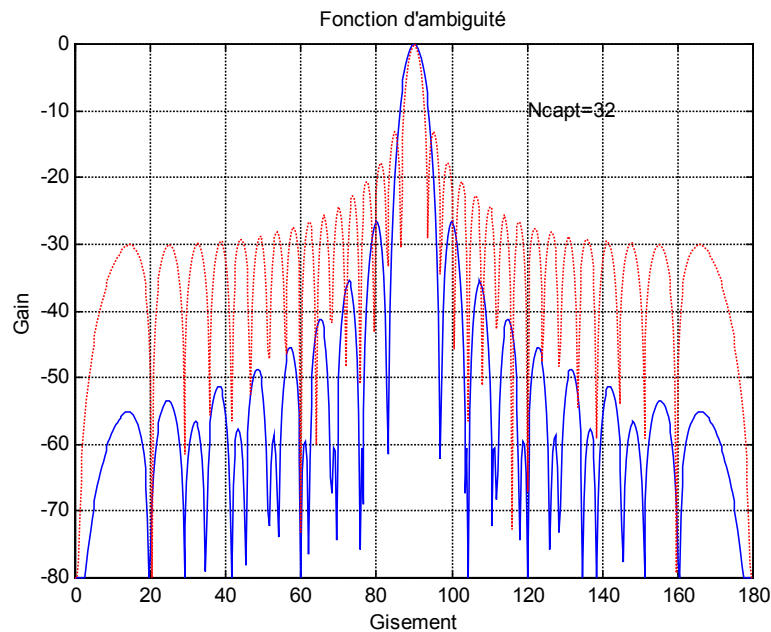
Dans le cas des pondérations uniformes on obtient des pondérations trapézoïdales dont les pondérations triangulaires ne sont que des cas particuliers.



Il y a deux pondérations que l'on peut qualifier de « triangulaires ». La première correspond à la convolution de deux pondérations uniformes de même longueur. Cette pondération possède donc un nombre impair de poids, et sa fonction de directivité est illustrée sur la figure suivante :

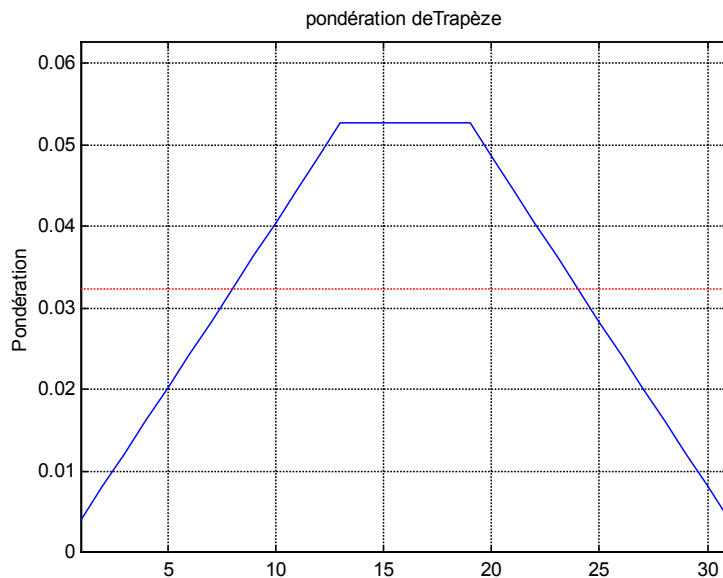
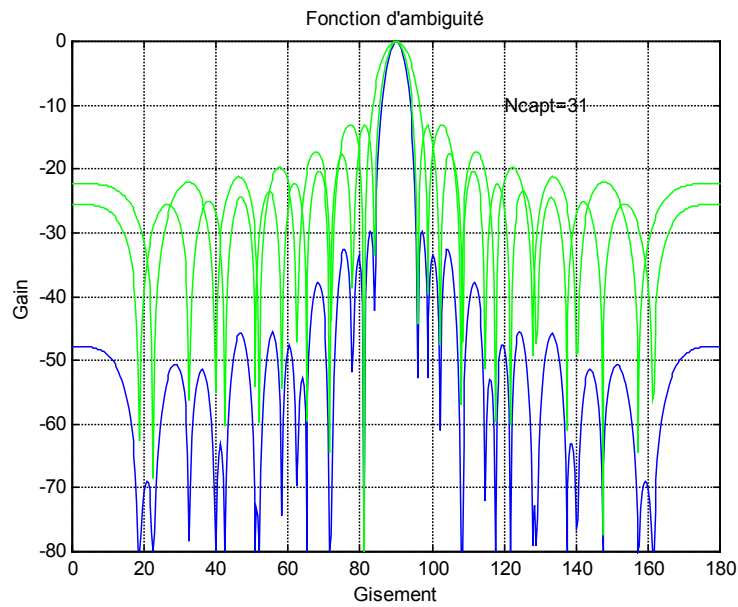


La seconde correspond à la convolution de deux pondérations uniformes de longueur différent d'une unité. Elle possède un nombre pair de poids et sa fonction de directivité est illustrée sur la figure suivante :



On constatera la présence de petits lobes secondaires qui viennent échancrent chaque intervalle entre deux lobes secondaires. Ce phénomène provient de l'écart d'une unité des longueurs des pondérations uniformes intervenant dans la convolution dont résulte la pondération triangulaire considérée.

Parmi les pondérations trapézoïdales fréquemment utilisées, il y a celles qui résultent de la convolution de deux pondérations uniformes dont les longueurs sont dans un rapport « deux tiers ». L'intérêt de ces pondérations provient du fait que le premier zéro de la pondération la plus courte est approximativement positionné sur le premier lobe secondaire de la pondération la plus longue. Le résultat est illustré sur la figure suivante qui donne la fonction de directivité des deux pondérations uniformes et celle de la pondération trapézoïdale qui en résulte.



Exercice 2 : Largeur du lobe principal en endfire

Quelle est la largeur angulaire à 3 dB du lobe principal d'une antenne en fonction de sa direction de pointage, et plus particulièrement dans le cas d'une antenne linéaire périodique de longueur L pointée dans la direction axiale et dans la direction transverse ?

niveau : élémentaire

La fonction d'ambiguïté d'une antenne linéaire uniforme à K capteurs dont la distance entre capteurs est d s'écrit à l'aide de la fonction de FEJER :

$$D(\theta) = \left(\frac{\sin(K\pi \frac{d}{\lambda} (\cos(\theta) - \cos(\theta_0)))}{K \sin(\pi \frac{d}{\lambda} (\cos(\theta) - \cos(\theta_0)))} \right)^2$$

La largeur à 3 dB s'obtient en résolvant tout d'abord l'équation :

$$\frac{\sin(Kx)}{K \sin(x)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

La solution en x peut être approchée, si K est grand, par celle de l'équation

$$\sin c(Kx) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Le calcul exact donne $Kx = \pm 1.3916$ (une approximation acceptable obtenue en utilisant un développement limité au 3^{ème} ordre est ± 1.375), et donc

$$K \frac{d}{\lambda} (\cos(\theta) - \cos(\theta_0)) = \pm 0.443$$

On peut alors préciser la largeur du lobe principal autour de la direction transverse pour laquelle on aura

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta_3\right) &= \mp \frac{0.443\lambda}{Kd} \\ &= \mp \sin(\theta_3) \\ &\cong \mp \theta_3 \end{aligned}$$

et donc $2\theta_3 \left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.886 \frac{\lambda}{L}$ en désignant par L la quantité Kd (en fait c'est (K-1)d mais, si K est grand, c'est presque la même chose).

Par ailleurs, dans la direction axiale on a plutôt

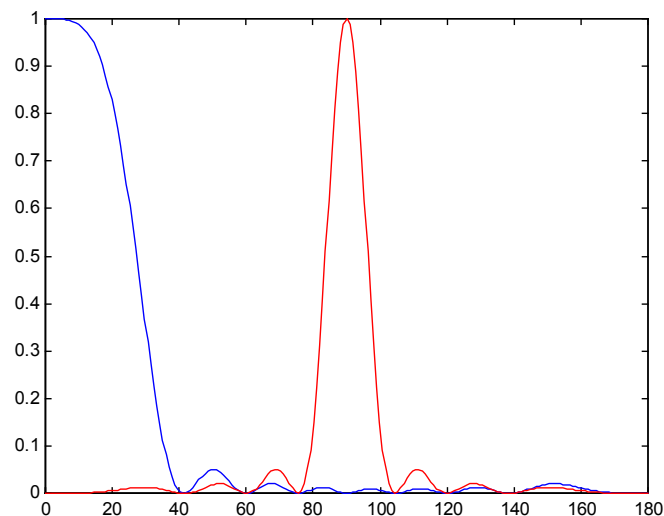
$$\cos(\theta_0 \pm \theta_3) - \cos(\theta_0) = -\frac{0.443\lambda}{Kd}$$

$$\cos(\theta_3) - 1 \cong -\frac{\theta_3^2}{2}$$

On en déduit que $2\theta_3(0) = 2\sqrt{0.886\frac{\lambda}{L}} = 2\sqrt{2\theta_3(\frac{\pi}{2})}$.

Une antenne pointée dans sa direction axiale est donc considérablement moins directive que dans sa direction transverse. Ceci est conforme à l'intuition qu'une antenne possède une sélectivité spatiale en raison inverse de son ouverture (ouverture projetée perpendiculairement à la direction visée). L'ouverture apparente de l'antenne dans sa direction axiale est nulle ; il ne faut donc pas s'attendre à des merveilles de sélectivité dans cette direction. D'ailleurs, dans la pratique, peut-être même que la sélectivité réelle sera encore moins bonne car il y aura des effets parasites qui rendent le résultat précédent peu fiable (par exemple les capteurs ne sont pas vraiment transparents).

A titre d'illustration, la figure ci-dessous visualise cette différence de largeur..



Malgré cette différence de largeur très défavorable aux antennes linéaires pointées dans leur direction axiale, il semble que le gain d'antenne (vis-à-vis d'un bruit isotrope sphérique) est beaucoup plus favorable (3 dB) aux antennes pointées axiales qu'aux antennes transverses. Ceci n'est vrai que pour du bruit isotrope sphérique (donc volumique) et avec la réserve concernant la transparence des capteurs vis-à-vis des ondes axiales. Cela s'explique par le fait que le lobe principal dans la direction axiale couvre un angle solide plus faible que celui couvert par le lobe dans la direction transverse (compte tenu de l'ambiguïté conique).

Exercice 3 : Filtre SAW et traitement d'antenne

Un filtre à Onde de Surface utilise deux antennes pour réaliser un filtrage spectral. La première antenne est une antenne d'émission constituée d'un réseau périodique d'émetteurs de pas λ_0 . L'antenne de réception possède une structure analogue, alignée avec la première dans la direction axiale (voir figure).

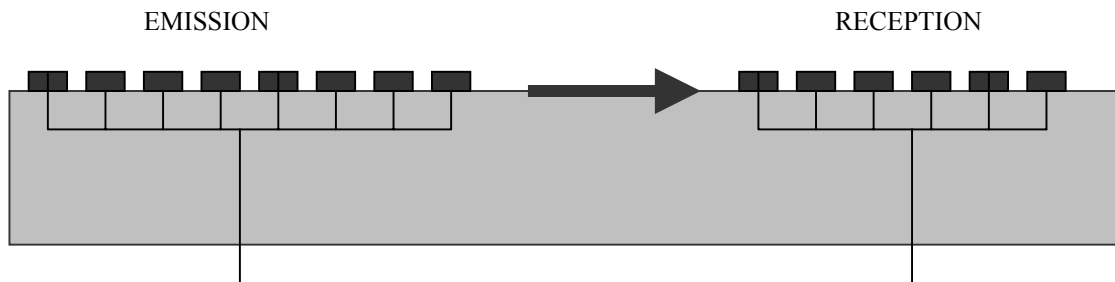


Figure 1 : Structure d'un filtre à Onde de Surface

Calculez la forme de la fonction de transfert de ce filtre pour deux antennes non pondérées et de longueur K et L respectivement. Justifiez la « règle des deux tiers » souvent utilisée en filtrage à ondes de surface ; cette règle encourage à utiliser un rapport K/L de l'ordre de deux tiers pour améliorer la forme de la fonction de transfert.

On a l'habitude de considérer une antenne comme un système spatial. Mais l'aspect spatial est souvent indiscernable de l'aspect temporel et l'exemple traité ici montre bien que le traitement du signal (filtrage temporel) est une partie du traitement d'antenne ☺

Les antennes considérées ici sont constituées d'émetteurs ou de récepteurs distants d'une longueur d'onde. De telles antennes sont bien sûr ambiguës et leur fonction d'ambiguïté présentent des lobes images dont les directions varient en fonction de la fréquence. Si donc un récepteur est disposé dans l'axe de l'un de ces lobes images pour une certaine fréquence f_0 et si la fréquence varie, le niveau de signal variera avec la fréquence. C'est ce que cet exercice tente d'expliquer.

Tout d'abord on peut écrire la fonction de directivité d'une antenne linéaire uniforme de pas d :

$$D(\theta) = \left(\frac{\sin\left(K\pi \frac{d}{\lambda} (\cos(\theta) - \cos(\theta_0))\right)}{K \sin\left(\pi \frac{d}{\lambda} (\cos(\theta) - \cos(\theta_0))\right)} \right)^2$$

On posera $d=\lambda_0$ pour insister sur le fait que la distance intercapteur est égale à une longueur d'onde pour la fréquence centrale f_0 du filtre. Dans cette expression on supposera que θ_0 est égale à 90 degrés et que θ est nul. La fonction $D(\theta)$ devient une fonction de la fréquence :

$$D(f) = \left(\frac{\sin(K\pi \frac{f}{f_0})}{K \sin(\pi \frac{f}{f_0})} \right)^2$$

Pour le couple émission/réception, la fonction de transfert s'écrit donc

$$D(f) = \left(\frac{\sin(K\pi \frac{f}{f_0})}{K \sin(\pi \frac{f}{f_0})} \right)^2 \left(\frac{\sin(L\pi \frac{f}{f_0})}{L \sin(\pi \frac{f}{f_0})} \right)^2$$

On peut faire la remarque suivante : Il est intéressant de choisir la longueur des antennes de telle sorte que le premier lobe secondaire de l'antenne d'émission (supposée la plus longue) soit positionné en face du premier zéro de l'antenne de réception.. Cette condition s'écrit approximativement :

$$\frac{3\pi f}{2K f_0} = \frac{\pi f}{L f_0}$$

c'est la règle des « deux tiers »..

Exercice 4 : Antenne en champ proche

On considère une antenne linéaire uniforme pour des sources en champ proche dans un milieu de propagation homogène. Les sources sont trop proches pour que l'on puisse considérer comme négligeables les variations de l'amplitude des signaux qu'elles engendrent sur les divers capteurs de l'antenne. On supposera l'atténuation sphérique. Ces considérations permettent de définir la variété d'antenne. Le traitement d'antenne envisagé est un traitement classique qui néglige les effets de la distance sur l'amplitude mais pas sur la phase (phase quadratique en première approximation). On demande d'évaluer et de discuter du gain d'antenne de ce traitement vis-à-vis d'un bruit incohérent.

On commencera par préciser l'expression du vecteur source. Dans un milieu homogène et des conditions d'atténuation sphérique, la fonction de transfert entre un point de position polaire $\{R_0, \theta_0\}$ par rapport au premier capteur (que l'on prendra comme référence) et un capteur de position z_k peut s'écrire :

$$\frac{1}{R_k} \exp\left(-2i\pi \frac{R_k}{\lambda}\right)$$

Dans cette expression R_k désigne la distance entre le k^{eme} capteur et la source.

Pour simplifier l'analyse on supposera que le premier capteur est positionné au centre de l'antenne et que la source est située exactement dans l'axe de l'antenne à une distance R_0 . On peut alors écrire l'expression de R_k à l'aide du théorème de PYTHAGORE.

$$R_k = \sqrt{R_0^2 + z_k^2} = R_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z_k}{R_0}\right)^2}$$

On en déduit l'expression de la k^{eme} composante du vecteur source.

$$(\underline{d})_k = \frac{\exp\left(-2i\pi \frac{R_k}{\lambda}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{z_k}{R_0}\right)^2}}$$

Le traitement d'antenne envisagé est un traitement dont la fonction de transfert admet pour k^{eme} composante :

$$(\underline{H})_k = \frac{\exp\left(2i\pi \frac{R_k}{\lambda}\right)}{K}$$

Le gain de ce traitement d'antenne sur du bruit incohérent est donné par :

$$G = \frac{|\underline{H}^T \underline{d}|^2}{\|\underline{H}\|^2}$$

Cette expression se développe sous la forme :

$$G = \frac{\left| \sum_{k=1, K} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{z_k}{R_0}\right)^2}} \right|^2}{K}$$

Pour simplifier l'analyse on remplace la somme discrète par une intégrale :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1, K} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{z_k}{R_0}\right)^2}} &= \frac{KR_0}{L} \int_{-L/2R_0}^{L/2R_0} \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}} du \\ &= \frac{K}{x} \operatorname{sh}^{-1}(x) \end{aligned}$$

où x est égal à $L/2R_0$.

L'expression du gain d'antenne s'en déduit :

$$G = K \left(\frac{\operatorname{sh}^{-1}(x)}{x} \right)^2$$

Si on pose

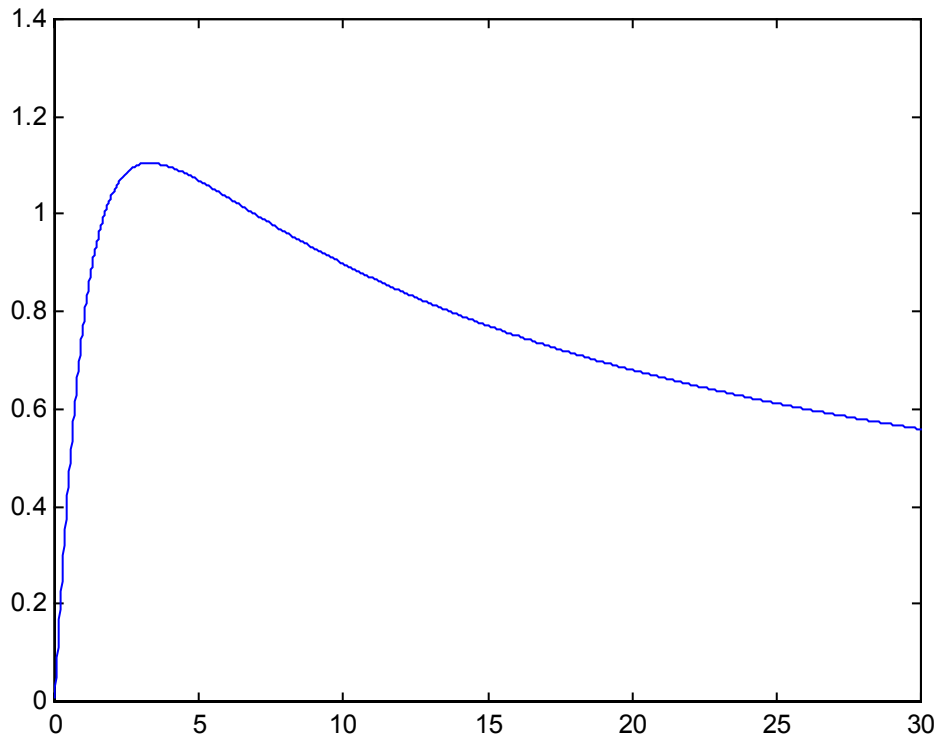
$$K = \frac{2L}{\lambda} = \frac{4R_0}{\lambda} x$$

On a une approximation raisonnable de la valeur de K en relation avec x .

On en déduit la valeur du gain d'antenne :

$$G = \frac{4R_0}{\lambda} \frac{\left(\operatorname{sh}^{-1}(x)\right)^2}{x}$$

On remarquera que cette fonction tend vers 0 lorsque x tend vers 0 et, plus curieux, qu'elle tend vers 0 quand x tend vers l'infini. Ceci montre qu'il existe une valeur de x pour laquelle le gain d'antenne passe par une valeur maximale. La figure suivante le montre d'ailleurs clairement :



Le maximum est voisin de 3, ce qui correspond à une longueur d'antenne égale à 6 fois la distance de la source, il n'est pas très marqué et la valeur atteinte est de l'ordre de 1.1, ce qui signifie que le gain maximum d'antenne est proche de $4R/\lambda$.

Exercice 5 : Valeur propre et détection

On s'intéresse à la définition d'un test de détection d'une source de cohérence spatiale parfaite dans le cas où la variété d'antenne est inconnue (géométrie d'antenne inconnue ou bien surface d'onde inconnue). La détection que l'on cherche à réaliser doit se faire vis-à-vis d'un bruit incohérent de niveau inconnu. Par ailleurs le niveau du signal est inconnu (on précise que le signal peut être considéré comme un processus aléatoire). On précise enfin que les signaux sont Gaussiens et que l'on dispose d'une observation constituée de N transformées de FOURIER effectuées sur des tranches temporelles disjointes et statistiquement indépendantes sur lesquelles les signaux sont stationnaires. La résolution de l'analyse spectrale est suffisante pour qu'on admette que la matrice de covariance de l'observation est égale à la matrice interspectrale.

Dans le rapport de vraisemblance usuel on voit apparaître des quantités qui sont inconnues. Selon l'usage (dont la justification est discutable) on remplace dans ce rapport de vraisemblance les quantités inconnues par des estimations optimales au sens du maximum de vraisemblance : c'est l'approche du RVG (Rapport de Vraisemblance Généralisé).

Nous allons donc, dans un premier temps, calculer l'estimation au sens du maximum de vraisemblance des divers paramètres.

Tout d'abord dans la situation bruit seul il s'agit d'estimer le niveau spectral du bruit incohérent.

La densité de probabilité de l'observation s'écrira ici

$$p_x(x) = |\pi\Gamma|^{-N} \exp(-N\text{Tr}(\hat{\Gamma}\Gamma^{-1}))$$

Dans le cas particulier du bruit incohérent on aura

$$\Gamma = \sigma I$$

Et donc on peut écrire la vraisemblance logarithmique, sous la forme :

$$L(\sigma) = -NK \ln(\pi) - N \left\{ K \ln(\sigma) + \frac{\text{Tr}(\hat{\Gamma})}{\sigma} \right\}$$

La dérivée de cette vraisemblance s'annule pour

$$\frac{K}{\sigma} - \frac{\text{Tr}(\hat{\Gamma})}{\sigma^2} = 0$$

D'où l'estimation du niveau spectral du bruit :

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{K} \text{Tr}(\hat{\Gamma})$$

Ce qu'on interprète comme la moyenne des valeurs propres de la matrice interspectrale estimée.

Pour cette valeur du paramètre on constate que

$$\text{Tr}(\hat{\Gamma}\Gamma^{-1}) = \frac{1}{\hat{\sigma}} \text{Tr}(\hat{\Gamma}) = K$$

On en déduira la valeur de la vraisemblance maximale :

$$p_0(x) = \left(\frac{\pi \text{Tr}(\hat{\Gamma}) e}{K} \right)^{-KN}$$

C'est la valeur que l'on portera au dénominateur du test de détection.

Intéressons nous maintenant au cas du signal. La matrice interspectrale est égale à :

$$\Gamma = \sigma I + \gamma \underline{d} \underline{d}^+$$

La matrice inverse est :

$$\Gamma^{-1} = \frac{1}{\sigma} \left(I - \frac{\gamma \underline{d} \underline{d}^+}{\sigma + \gamma \underline{d}^+ \underline{d}} \right) \text{ (Lemme d'inversion)}$$

et son déterminant est :

$$|\Gamma| = \sigma^{K-1} (\sigma + \gamma \underline{d}^+ \underline{d}) \text{ (produit des valeurs propres)}$$

On en déduit alors facilement l'expression de la vraisemblance logarithmique :

$$L(\sigma, \gamma, \underline{d}) = -NK \text{Ln}(\pi) - N \left\{ (K-1) \text{Ln}(\sigma) + \text{Ln}(\sigma + \gamma \underline{d}^+ \underline{d}) + \frac{\text{Tr}(\hat{\Gamma})}{\sigma} - \frac{\gamma \underline{d}^+ \hat{\Gamma} \underline{d}}{\sigma (\sigma + \gamma \underline{d}^+ \underline{d})} \right\}$$

L'estimation du vecteur source est une estimation sous contrainte puisque, dans la variété d'antenne, on utilise le premier capteur comme référence. La première composante du vecteur source est toujours égale à l'unité. On écrit ceci comme une contrainte linéaire :

$$\underline{d}^+ \underline{e} = 1$$

Le vecteur \underline{e} est un vecteur dont toutes les composantes sont nulles sauf la première, égale à l'unité. Le LAGRANGIEN du problème s'écrit :

$$L(\sigma, \gamma, \underline{d}) + \mu(\underline{d}^+ \underline{e} - 1)$$

Son gradient se calcule sans difficulté :

$$\frac{2\gamma \underline{d}}{\sigma + \gamma \underline{d}^+ \underline{d}} - \frac{2\gamma \hat{\Gamma} \underline{d}}{\sigma(\sigma + \gamma \underline{d}^+ \underline{d})} + \frac{2\gamma \underline{d}^+ \hat{\Gamma} \underline{d} \underline{d}}{\sigma(\sigma + \gamma \underline{d}^+ \underline{d})^2} + \mu \underline{e} = \underline{0}$$

Cette équation s'écrit encore :

$$\frac{2\gamma}{\sigma + \gamma \underline{d}^+ \underline{d}} \left(I - \frac{1}{\sigma} \left(I - \frac{\underline{d} \underline{d}^+}{\sigma + \gamma \underline{d}^+ \underline{d}} \right) \hat{\Gamma} \right) \underline{d} = -\mu \underline{e}$$

Soit encore, sous forme compacte :

$$\frac{2\gamma}{\sigma + \gamma \underline{d}^+ \underline{d}} (I - \Gamma^{-1} \hat{\Gamma}) \underline{d} = -\mu \underline{e}$$

L'estimation du niveau spectral du signal s'obtient en annulant la dérivée de la vraisemblance logarithmique par rapport à ce paramètre. L'équation à résoudre s'écrit :

$$\frac{\underline{d}^+ \underline{d}}{\sigma + \gamma \underline{d}^+ \underline{d}} - \frac{\underline{d}^+ \hat{\Gamma} \underline{d}}{\sigma(\sigma + \gamma \underline{d}^+ \underline{d})} + \frac{\gamma \underline{d}^+ \underline{d} \underline{d}^+ \hat{\Gamma} \underline{d}}{\sigma(\sigma + \gamma \underline{d}^+ \underline{d})^2} = 0$$

Cette équation peut également se mettre sous la forme :

$$\underline{d}^+ (I - \Gamma^{-1} \hat{\Gamma}) \underline{d} = 0$$

On en déduit alors que, dans l'équation concernant l'estimation du vecteur source, la quantité m est nulle et que donc :

$$\hat{\Gamma} \underline{d} = \Gamma \underline{d} = (\sigma + \gamma \underline{d}^+ \underline{d}) \underline{d}$$

Ce qui montre que $\lambda_1 = (\sigma + \gamma \underline{d}^+ \underline{d})$ est la valeur propre de la matrice interspectrale estimée associée à sa plus grande valeur propre et que \underline{d} est le vecteur propre correspondant.

Enfin l'estimation du niveau spectral du bruit s'exprime de même en annulant la dérivée de la vraisemblance logarithmique par rapport à σ . L'équation à résoudre s'écrit :

$$\frac{K-1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma + \gamma \underline{d}^+ \underline{d}} - \frac{Tr(\hat{\Gamma})}{\sigma^2} + \frac{d^+ dy \lambda_1}{\sigma^2 (\sigma + \gamma \underline{d}^+ \underline{d})} + \frac{\underline{d}^+ dy \lambda_1}{\sigma (\sigma + \gamma \underline{d}^+ \underline{d})^2} = 0$$

Notez que nous avons déjà utilisé, dans l'écriture de cette expression, des résultats issus des équations précédentes. La résolution simultanée des trois équations permet de résoudre la dernière équation en écrivant :

$$\frac{K-1}{\sigma} + \frac{1}{\lambda_1} - \frac{Tr(\hat{\Gamma})}{\sigma^2} + \frac{d^+ dy \lambda_1}{\sigma^2 \lambda_1} + \frac{\underline{d}^+ dy \lambda_1}{\sigma (\lambda_1)^2} = 0$$

On en déduit alors très facilement :

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{K-1} \sum_{k \neq 1} \lambda_k$$

Il apparaît donc que le niveau spectral du bruit est égal à la moyenne des K-1 plus petites valeurs propres de la matrice interspectrale estimée. Plus intéressante peut être est l'expression finale du rapport de vraisemblance généralisé. On montre tout d'abord très facilement que

$$Tr(\hat{\Gamma} \Gamma^{-1}) = K$$

et on calcule directement :

$$|\Gamma| = \left(\frac{\sum_{k \neq 1} \lambda_k}{K-1} \right)^{K-1} \lambda_1$$

La vraisemblance optimisée est donc :

$$p_1(x) = \left((\pi e)^K \left(\frac{\sum_{k \neq 1} \lambda_k}{K-1} \right)^{K-1} \lambda_1 \right)^{-N}$$

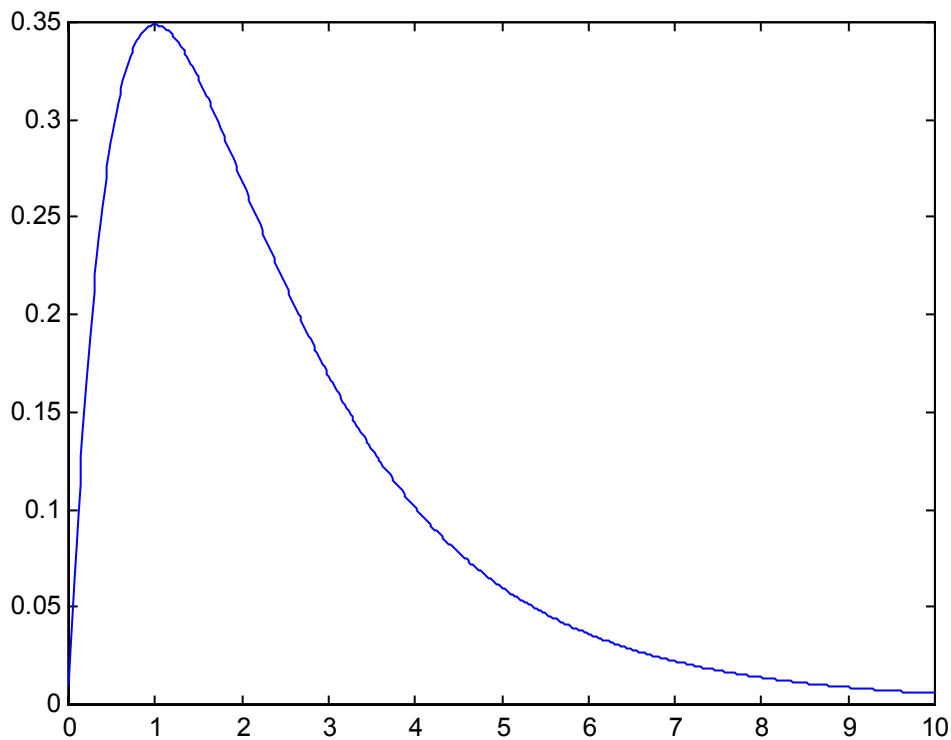
et le rapport de vraisemblance généralisé sera :

$$\frac{p_1(x)}{p_0(x)} = \left(\left(\frac{\lambda_1}{\sum_{k \neq 1} \lambda_k} \right) \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{K-1} \left(\frac{\lambda_1}{\sum_{k \neq 1} \lambda_k} \right) \right)^K} \left(\frac{K}{K-1} \right)^K \right)^{-N}$$

Il s'exprime en fonction du seul rapport de la plus grande valeur propre de la matrice interspectrale estimée, divisée par la moyenne des plus petites. Si on définit par R ce rapport, on peut constater que le RVG est une fonction monotone de la quantité

$$\frac{R}{\left(1 + \frac{R}{K-1} \right)^K}$$

Or cette fonction de R est une fonction monotone de R pour R>1. Ce point est très facile à vérifier. On peut l'illustrer sur un tracé de la fonction de R ci-dessus.



On constatera que la quantité R est nécessairement supérieure à l'unité et que donc le test de détection consistera à comparer à un seuil la plus grande valeur propre de la matrice interspectrale estimée normalisée par la moyenne des plus petites. Au passage on aura également obtenu une estimation du vecteur source.

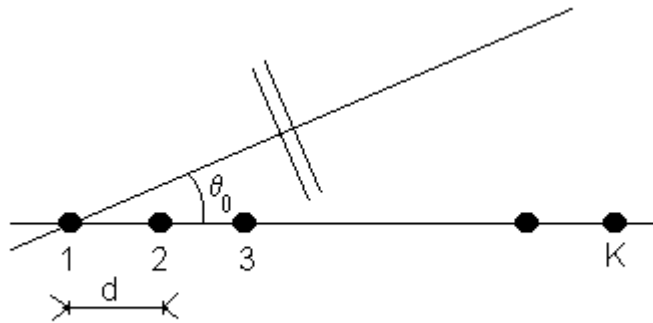
Exercice 6 : Fonction d'ambiguïté d'une antenne réseau linéaire périodique.

Etant donnée une antenne linéaire à K capteurs équidistants de d , étudier la fonction de directivité du traitement classique en supposant le milieu isocélère et les sources à l'infini (ondes planes). Discuter suivant la valeur de d et la direction de pointage θ_0 .

Le traitement classique admet pour fonction de transfert :

$$\underline{H}_C = \frac{\underline{d}_0^*}{\underline{d}_0^+ \underline{d}_0}$$

Le vecteur \underline{d}_0 est le vecteur source associé à la direction de pointage θ_0 .



Le vecteur source général de la variété d'antenne s'écrit donc :

$$\underline{d}_\theta = \text{col} \left\{ \exp \left(2i\pi \frac{d}{\lambda} (k-1) \cos \theta \right) \right\}_{k=1,K}$$

et on a $\| \underline{d}_{\theta_0} \|^2 = \underline{d}_{\theta_0}^+ \underline{d}_{\theta_0} = K$

La fonction de directivité s'en déduit : $D_C(\theta) = \left| \underline{H}_C^T \underline{d}_\theta \right|^2 = \frac{\left| \underline{d}_{\theta_0}^+ \underline{d}_\theta \right|^2}{\left(\underline{d}_{\theta_0}^+ \underline{d}_{\theta_0} \right)^2} = \frac{1}{K^2} \left| \underline{d}_{\theta_0}^+ \underline{d}_\theta \right|^2$

$$\begin{aligned} \underline{d}_{\theta_0}^+ \underline{d}_\theta &= \text{ligne} \left\{ \exp \left(-2i\pi \frac{d}{\lambda} (k-1) \cos \theta_0 \right) \right\}_{k=1,K} \text{col} \left\{ \exp \left(2i\pi \frac{d}{\lambda} (k-1) \cos \theta \right) \right\}_{k=1,K} \\ &= \sum_{k=1,K} \exp \left(2i\pi \frac{d}{\lambda} (k-1) (\cos \theta - \cos \theta_0) \right) \end{aligned}$$

d'où on obtient :

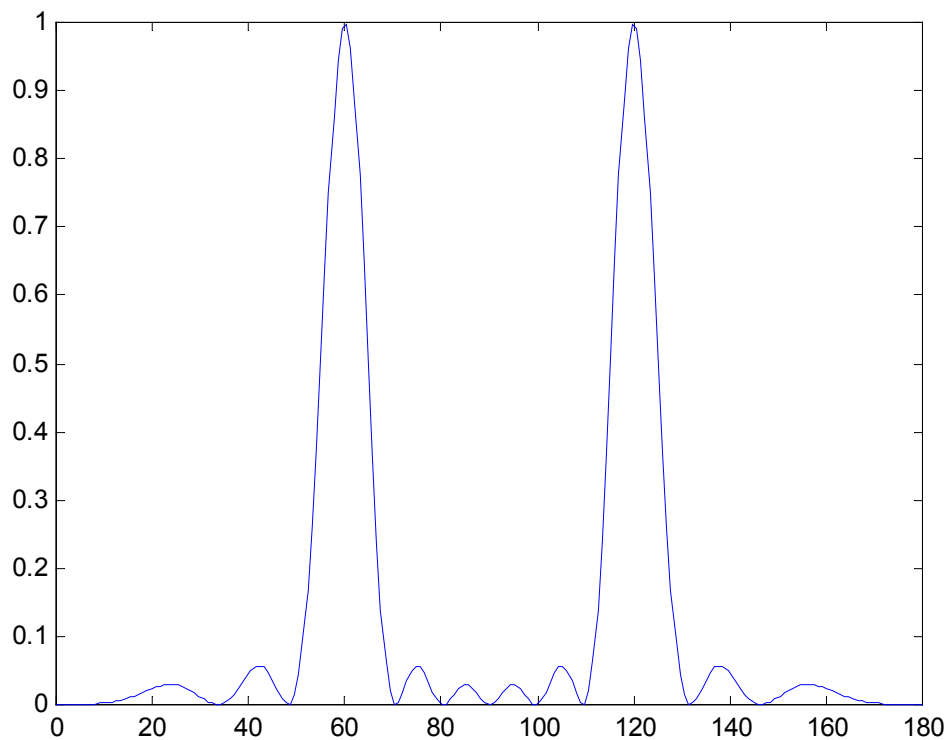
$$D_c(\theta) = \frac{\sin^2\left(\pi K \frac{d}{\lambda} (\cos\theta - \cos\theta_0)\right)}{K^2 \sin^2\left(\pi \frac{d}{\lambda} (\cos\theta - \cos\theta_0)\right)}$$

On notera u la variable $\frac{d(\cos\theta - \cos\theta_0)}{\lambda}$ et on pourra ainsi écrire :

$$D_c(\theta) = F_K(u) = \left(\frac{\sin(K\pi u)}{K \sin(\pi u)}\right)^2$$

$F_K(u)$ est connu sous le nom de Noyau de FEJER. C'est une fonction périodique de période 1.

A titre d'exemple on peut tracer la fonction de directivité pour une antenne de 6 capteurs pointée vers 60 degrés.



La figure correspond à un exemple dans lequel la distance d est égale à λ . Dans un tel cas un lobe image apparaît dans une direction donnée par la condition $u = \pm 1$. En azimut il s'agit, dans cet exemple, de la direction 120 degrés. Les lobes images sont inévitables si la distance intercapteurs est supérieure à λ . Ils sont impossibles si cette distance est inférieure à $\lambda/2$. Entre les deux ils sont possibles pour certaines valeurs de l'angle de pointage.

Plus précisément il faut résoudre l'équation en θ :

$$\cos \theta - \cos \theta_0 = \frac{\lambda}{d}$$

Cette équation n'admet de solutions que pour certaines valeurs de θ_0 . Il faut en effet que :

$$\left| \frac{\lambda}{d} + \cos \theta_0 \right| \leq 1$$

C'est à dire : $\frac{\lambda}{d} - 1 \leq \cos \theta_0 \leq \frac{\lambda}{d} + 1$

On constatera sans peine que, si $d < \frac{\lambda}{2}$, la condition ci-dessus n'est pas respectée.

Si, au contraire, $d \geq \frac{\lambda}{2}$, il existe toujours des valeurs de θ_0 qui respectent cette condition, mais il existe aussi des zones angulaires non ambiguës. Enfin, si $d \geq \lambda$, toutes les directions possèdent une direction image.

Exercice 7 : Propriété spatiale de la densité spectrale croisée.

Dans le cas où le milieu est isocélère et parcouru par des ondes planes engendrées par des sources indépendantes à l'infini (cf. modèle utilisé dans l'analyse du bruit), soit $\gamma(f, \underline{x})$ la densité spectrale croisée des signaux reçus à l'origine d'une part et en un point \underline{x} d'autre part (f désignant la fréquence).

- Montrer que $\gamma(f, \underline{x})$, en tant que fonction de \underline{x} , est la transformée de FOURIER de la fonction décrivant la distribution des sources.
- En déduire qu'une antenne linéaire périodique de pas d doit avoir une période $d < \frac{\lambda}{2}$ pour respecter la condition de NYQUIST.

La mesure de $\gamma(f, \underline{x})$ correspond à celle des termes croisés d'une matrice interspectrale associée à une antenne à 2 capteurs (l'un situé à l'origine, l'autre en \underline{x}), pour laquelle le vecteur source s'écrit :

$$\underline{d} = \text{col} \left\{ 1, \exp \left(2i\pi \frac{\underline{u}^T \underline{x}}{\lambda} \right) \right\}$$

où \underline{u} est le vecteur normé pointant vers la source.

Pour une distribution de sources indépendante et de bruit diffus, il a été proposé la forme générale suivante de la matrice interspectrale :

$$\Gamma = \sum_{i=1,p} \gamma_i \underline{d}_i \underline{d}_i^+ + \int_{\Omega} \underline{d}_\theta \underline{d}_\theta^+ \delta\gamma_\theta$$

Ce que l'on peut écrire sous une forme unique :

$$\Gamma = \int_{\Omega} \underline{d}(\underline{u}) \underline{d}^+(\underline{u}) \delta\mu(\underline{u})$$

où $\delta\mu(\underline{u})$ est une distribution décrivant la répartition des sources de signal et de bruit (selon les directions définies par \underline{u}). Le lien avec la formule initiale est définie par la relation :

$$\delta\mu(\underline{u}) = \sum_{i=1,p} \gamma_i \delta(\underline{u} - \underline{u}_i) + \delta\gamma(\underline{u})$$

où $\delta(\underline{u} - \underline{u}_i)$ est la distribution de DIRAC, et $\delta\gamma(\underline{u})$ est la distribution du bruit en variable \underline{u} .

Avec cette notation, compte tenu de la forme du vecteur source \underline{d} , on peut écrire :

$$\gamma(f, \underline{x}) = \Gamma_{12} = \int_{\Omega} \exp \left(-2i\pi \frac{\underline{u}^T \underline{x}}{\lambda} \right) \delta\mu(\underline{u})$$

Sous cette forme $\gamma(f, \underline{x})$ apparaît comme la transformée de FOURIER d'une quantité liée à la répartition spatiale des sources.

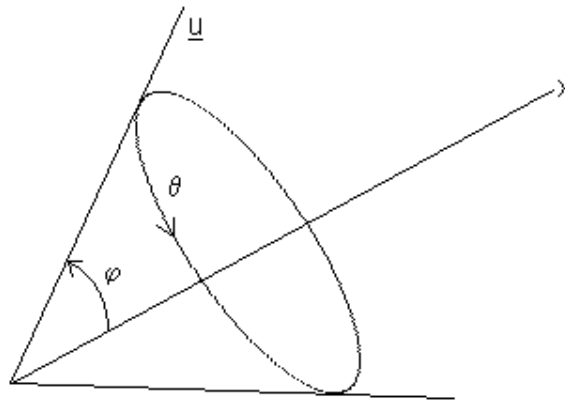
Si l'on dispose des capteurs le long d'un axe, on mesure :

$$\gamma(f, \underline{x}) = \Gamma_{12} = \int_0^\pi d\varphi \left[\int_0^{2\pi} \mu(\theta, \varphi) d\theta \right] \sin \varphi \exp\left(-2i\pi \frac{x \cos \varphi}{\lambda}\right)$$

En prenant $\cos \varphi$ comme variable ($u = \cos \varphi$),

$$\gamma(f, \underline{x}) = \int_{-1}^{+1} \tilde{\mu}(u) \exp\left(-2i\pi \left(\frac{x}{\lambda}\right) u\right) du$$

$\tilde{\mu}(u)$ désigne une répartition de sources intégrées selon θ .



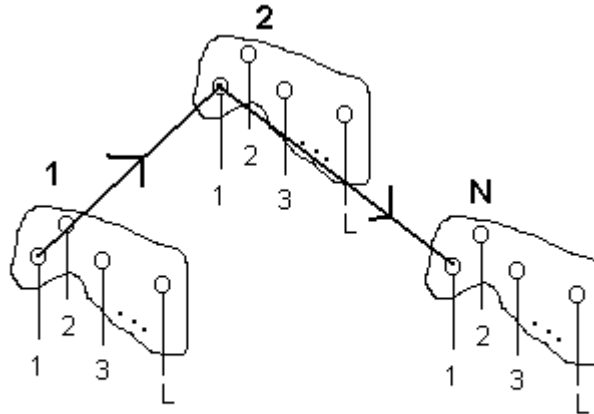
La formule précédente fait apparaître la fonction $\gamma(f, \underline{x})$ comme la transformée de FOURIER de la distribution spatiale des sources (à la fois discrète et continue). Elle permet également de conclure que, pour reconstruire cette répartition spatiale (qui est la quantité que l'on cherche en général) à partir de la mesure d'un échantillonnage discret de la fonction $\gamma(f, \underline{x})$ (c'est l'opération réalisée par une antenne), il faut respecter la condition de NYQUIST-SHANNON, à savoir que la fréquence d'échantillonnage doit être supérieure au double de la fréquence maximale présente dans le signal (c'est-à-dire 1 en variable u). Le résultat s'en déduit immédiatement : la « fréquence d'échantillonnage $\frac{\lambda}{d}$ » devra être supérieure à 2.

On retrouve donc la condition d'échantillonnage spatial que les distances mutuelles entre les capteurs devront être inférieures à $\frac{\lambda}{2}$ si l'on veut éviter le « repliement spectral », c'est-à-dire l'ambiguïté spatiale.

On aura donc remarqué l'étroite analogie existant entre l'analyse d'un signal scalaire et celle du signal d'une antenne linéaire. Cette analogie est à l'origine de certaines expressions utilisées en traitement d'antenne, comme, par exemple, le terme « fréquence spatiale » qui désigne parfois la variable $u = \cos \varphi$, duale de la dimension spatiale x/λ : trouver une fréquence ou une direction résulte donc de la même démarche.

Exercice 8 : Multiplication des diagrammes de directivité.

On considère une antenne constituée de N groupes identiques de L capteurs obtenus par translation d'un « motif ».



Géométrie d'un réseau de sous-antennes

Montrer que $D(\theta)$, la fonction de directivité du traitement classique appliqué à cette antenne, peut se décomposer selon la formule :

$$D(\theta) = D_M(\theta) D_R(\theta)$$

où $D_M(\theta)$ et $D_R(\theta)$ désignent les fonctions de directivité respectivement du motif et du réseau. Cette formule ne s'applique cependant que dans le cas des ondes planes.

Imaginer quelques applications intéressantes de cette propriété.

Par définition de la fonction de directivité $D(\theta)$ d'un filtre spatial \underline{H} , on a :

$$D(\theta) = \left| \underline{H}^T \underline{d}_\theta \right|^2$$

Ici on précise que le filtre spatial correspond au traitement classique

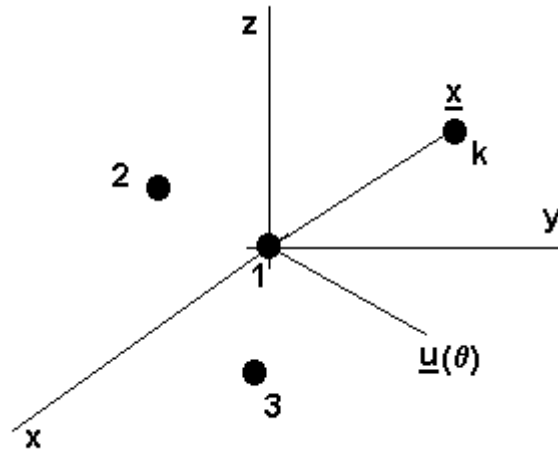
$$\underline{H} = \underline{H}_C = \frac{\underline{d}_0^*}{\underline{d}_0^+ \underline{d}_0}$$

où \underline{d}_0 est le vecteur source correspondant à la direction de pointage θ_0 .

On précise aussi la forme du vecteur \underline{d}_θ :

$$\underline{d}_\theta = \text{col} \left\{ \exp \left(2i\pi \frac{\underline{x}_k^T \underline{u}(\theta)}{\lambda} \right) \right\}_{k=1,K}$$

Dans cette formule, \underline{x}_k désigne le vecteur position du k^{eme} capteur, et $\underline{u}(\theta)$ est le vecteur normé pointant vers la source située en θ . Cette forme est, bien sûr, adaptée au seul cas des ondes planes.



Conventions géométriques. Ondes Planes

La fonction de directivité du traitement classique se calcule donc par :

$$D(\theta) = \frac{1}{K^2} \left| \sum_{k=1}^K \exp \left(2i\pi \frac{\underline{x}_k^T (\underline{u}(\theta) - \underline{u}_0)}{\lambda} \right) \right|^2$$

Cette formule s'applique quelle que soit la géométrie de l'antenne dans le cadre des ondes planes, en particulier pour les motifs M et le réseau R.

En prenant comme origine le premier capteur du premier motif, on désignera par $(\underline{x}_i)_{i=1,M}$ les vecteurs positions des capteurs constituant le motif M. De même, on désignera par $(\underline{X}_l)_{l=1,L}$ les vecteurs positions des L motifs dans le réseau R. On peut dire que \underline{X}_l est la translation nécessaire pour passer du premier motif au l^{eme} . On peut alors identifier tout capteur \underline{x}_k de l'antenne complète par un double indice (i,l) , où l désigne le numéro du motif et i désigne la position du capteur dans le motif.

On aura donc :

$$\underline{x}_k = \underline{X}_l + \underline{x}_i$$

où $k=1,..,ML$; $l=1,..,L$ et $i=1,..,M$

On pourra noter l'indice k comme (i,l) .

$$\underline{x}_k = \underline{x}_{i,l} = \underline{X}_l + \underline{x}_i$$

On en déduit alors :

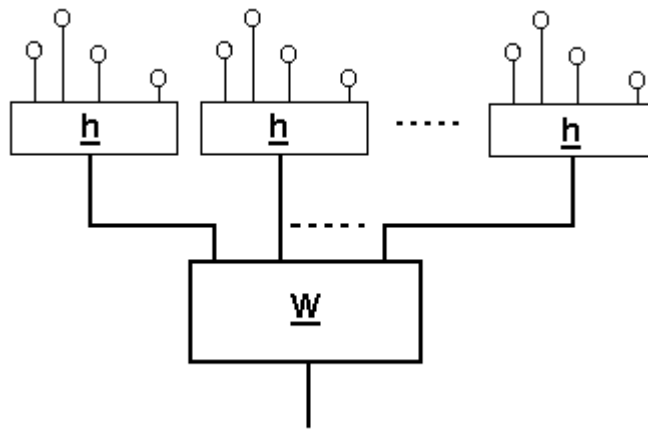
$$D(\theta) = \frac{1}{M^2 L^2} \left| \sum_{\substack{i=1, \dots, N \\ l=1, \dots, L}} \exp\left(2i\pi \frac{(x_i + X_l)}{\lambda} (\underline{u}(\theta) - \underline{u}_0)\right) \right|^2$$

D'où le résultat par séparation des variables :

$$\begin{aligned} & \exp\left(\frac{2i\pi}{\lambda} (X_l + x_i) (\underline{u}(\theta) - \underline{u}_0)\right) \\ &= \exp\left(\frac{2i\pi}{\lambda} x_i (\underline{u}(\theta) - \underline{u}_0)\right) \exp\left(\frac{2i\pi}{\lambda} X_l (\underline{u}(\theta) - \underline{u}_0)\right) \end{aligned}$$

D'où on déduit $D(\theta) = D_M(\theta) D_R(\theta)$.

Le résultat précédent se généralise pour des filtres spatiaux plus généraux que le seul traitement classique. A condition d'appliquer le même traitement \underline{h} à tous les motifs de l'antenne, la propriété de multiplication des fonctions d'ambiguïté est vérifiée quel que soit le traitement spatial du réseau \underline{W} .



Soit donc H le filtre spatial appliqué à l'ensemble de l'antenne. Il se décompose donc en :

$$\underline{H} = \underline{h} \otimes \underline{W} \quad (\text{fonction de transfert – Domaine spectral})$$

La notation tensorielle \otimes signifie que :

$$H_{i,l} = W_l h_i \quad l=1, \dots, L ; i=1, \dots, N$$

L'indice (i,l) se décompose sur le réseau l et le motif i . On peut écrire :

$$\underline{H} = \begin{pmatrix} h_1 \underline{W} \\ h_2 \underline{W} \\ \cdot \\ \cdot \\ h_N \underline{W} \end{pmatrix}$$

On a, en sortie du filtre spatial \underline{H} , un signal qui s'écrit

$$y(t) = \sum_{(i,l)=1,\dots,ML} H_{i,l}(t-u) * x_{i,l}(u)$$

Mais on a $H_{i,l}(t) = W_l * h_i(t)$ (réponse impulsionnelle – Domaine temporel).

Le vecteur source s'écrira de même :

$$(\underline{d})_{i,l} = \exp\left(2i\pi \frac{\underline{u}^T}{\lambda} (\underline{X}_l + \underline{x}_i)\right)$$

- \underline{u} désigne un vecteur normé pointant vers la source
- \underline{x}_i désigne la position du capteur i dans le motif
- \underline{X}_l désigne la position de l'origine du motif l .

On peut donc écrire :

$$\underline{d} = \underline{\Delta} \otimes \underline{\delta}$$

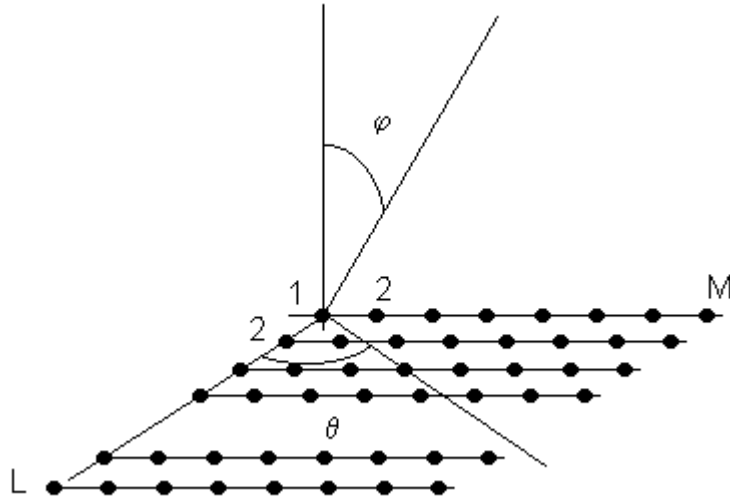
- \underline{D} est associé au réseau, avec $(\underline{\Delta})_l = \exp\left(2i\pi \frac{\underline{u}^T \underline{X}_l}{\lambda}\right)$
- \underline{d} est associé au motif, avec $(\underline{\delta})_i = \exp\left(2i\pi \frac{\underline{u}^T \underline{x}_i}{\lambda}\right)$

La fonction de directivité du filtre \underline{H} s'écrit alors :

$$\begin{aligned} D(\underline{u}) &= \left| \underline{H}^T \underline{d}(\underline{u}) \right|^2 \\ &= \left| \sum_{(i,l)=1,\dots,ML} H_{i,l}(\underline{d})_{i,l} \right|^2 \\ &= \left| \sum_{l=1,\dots,L} \sum_{i=1,\dots,M} W_l h_i \Delta_l \delta_i \right|^2 \\ &= \left| \underline{W}^T \underline{\Delta} \right|^2 \left| \underline{h}^T \underline{\delta} \right|^2 \\ &= D_R(\underline{u}) D_M(\underline{u}) \end{aligned}$$

$D_R(\underline{u})$ désigne la fonction de directivité du filtre spatial \underline{W} . C'est la fonction de directivité du réseau R des capteurs de référence. De même, $D_M(\underline{u})$ désigne la fonction de directivité du filtre spatial \underline{h} qui intervient sur un motif.

Cette propriété peut être utilisée pour simplifier les calculs des fonctions de directivité de structures d'antenne répétitives. Par exemple une antenne constituée d'un réseau plan bidimensionnel.



La fonction de directivité s'obtient facilement comme produit de la fonction de directivité d'une colonne (direction \underline{l}) par celle d'une ligne (direction \underline{j}). Pour la colonne, la fonction de directivité s'écrit :

$$Fej_L \left(\pi \frac{d}{\lambda} (\underline{u} - \underline{u}_0)^T \underline{l} \right)$$

où $Fej_L(x) = \left(\frac{\sin(Lx)}{L \sin(x)} \right)^2$ est la fonction de FEJER. Il en est de même pour les lignes (même formule, L devient N, \underline{l} devient \underline{j}).

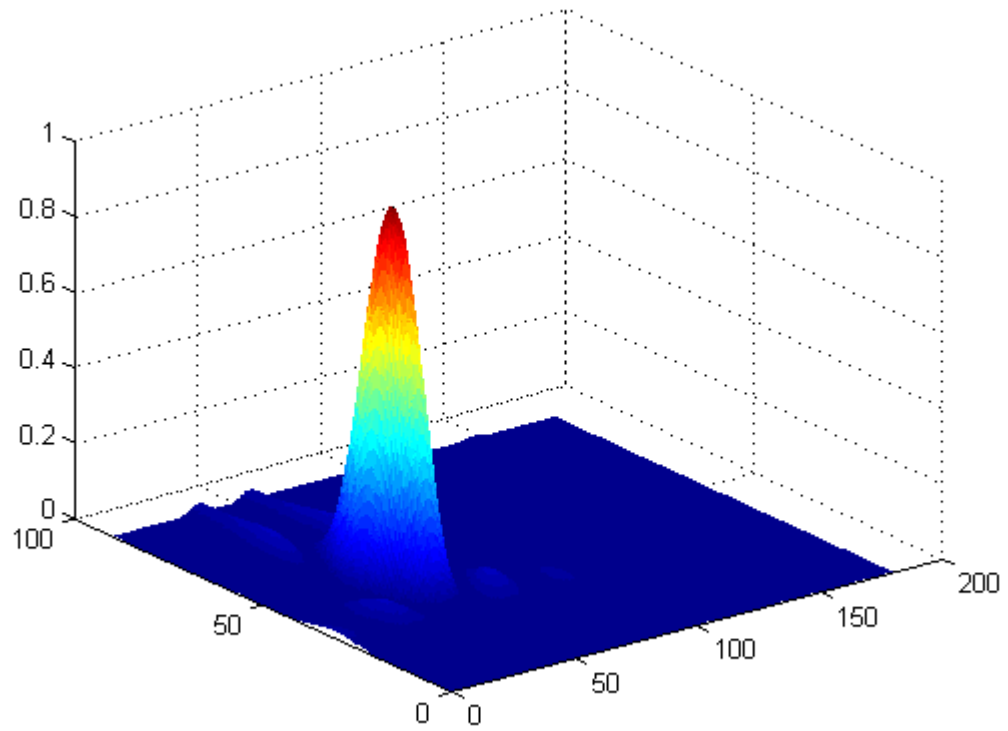
En coordonnées sphériques on aura :

$$\underline{u} = (\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi)$$

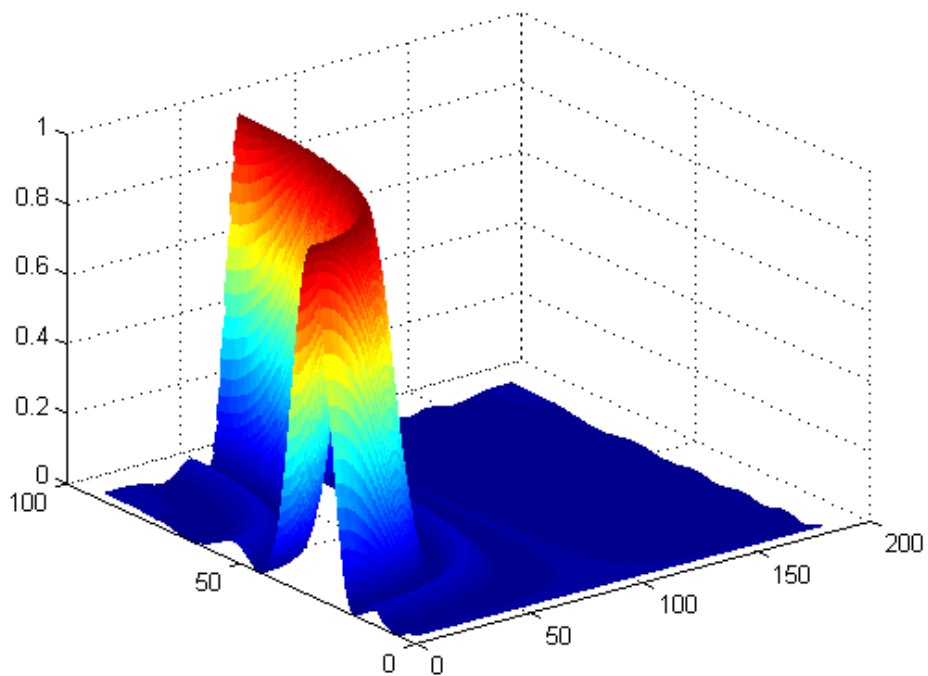
d'où le résultat :

$$D(\theta, \varphi) = Fej_L \left(\pi \frac{d}{\lambda} (\sin \varphi \cos \theta - \sin \varphi_0 \cos \theta_0) \right) Fej_L \left(\pi \frac{d}{\lambda} (\sin \varphi \sin \theta - \sin \varphi_0 \sin \theta_0) \right)$$

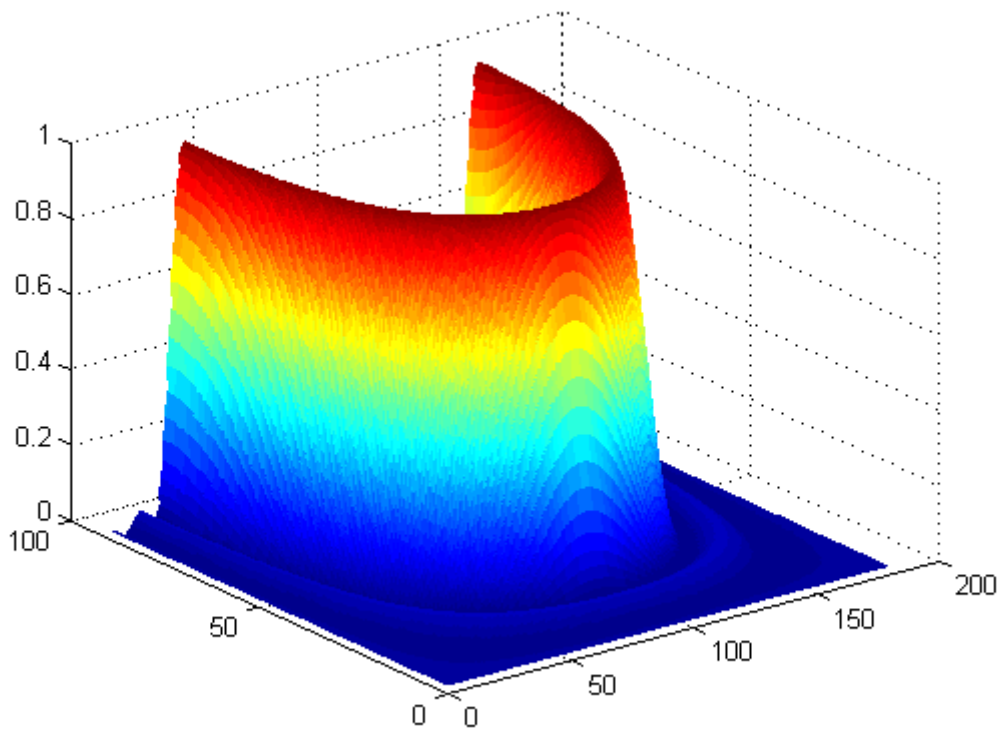
Le tracé de cette fonction fait clairement apparaître la contribution de chacun des termes (lignes et colonnes).



Fonction d'ambiguïté de l'antenne complète



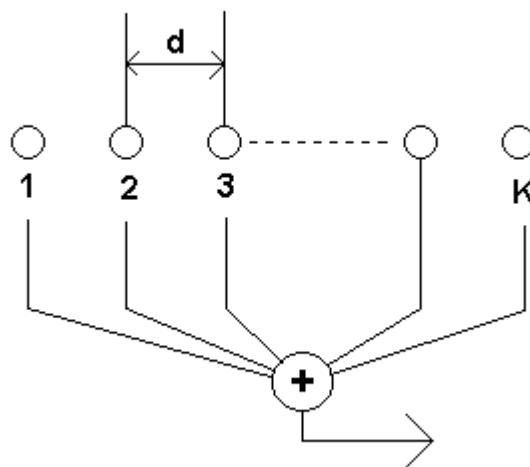
Fonction d'ambiguïté d'une colonne

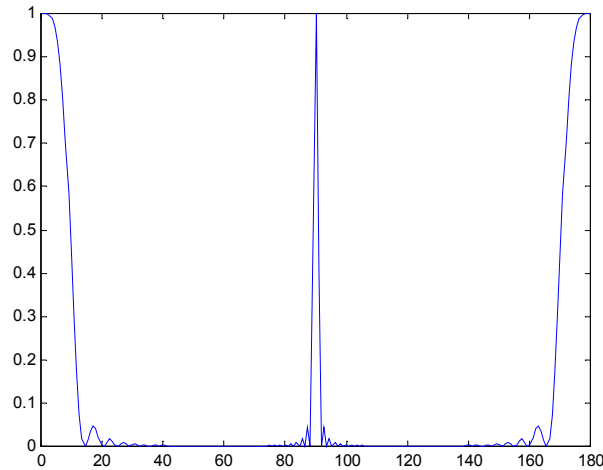


Fonction d'ambiguïté d'une ligne

Le second exemple qui est proposé est le balayage par lobe image.

Lorsqu'une antenne linéaire périodique possède une période $d > \lambda$, et que l'on fait la somme des capteurs (sans appliquer de retards, ce qui revient à pointer l'antenne en « Broadside », c'est-à-dire par le travers), on obtient un traitement dont la fonction de directivité présente des lobes images.





Lobes images d'une antenne sous-échantillonnée

En effet, la fonction de directivité est:

$$D(\theta, \varphi) = F e^{j_k \left(\pi \frac{d}{\lambda} \cos \theta \right)}$$

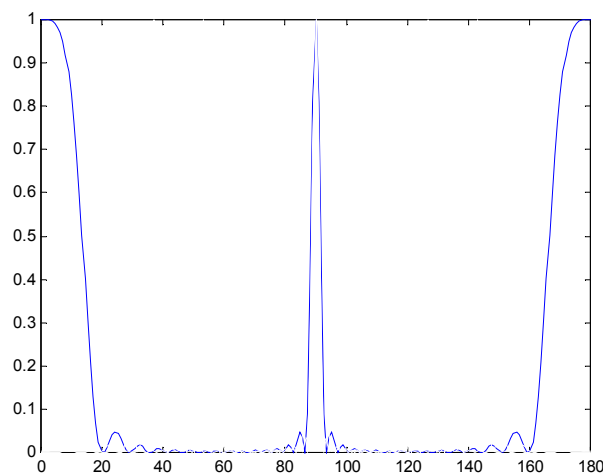
et on a $D(\theta) = 1$ pour les directions :

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad (\text{Normal, c'est la direction de pointage})$$

$$\theta = \theta_a = \cos^{-1} \left(\frac{\lambda}{d} \right) \quad \text{et}$$

$$\theta = \pi - \theta_a$$

Le point intéressant est que l'on peut pointer à volonté le lobe image en modifiant la fréquence du signal appliqué. Cette propriété est à l'origine de l'utilisation des réseaux pour faire de l'analyse spectrale (en optique avec les réseaux de diffraction, et en acoustique avec les filtres à Ondes de surface ou filtres SAW).



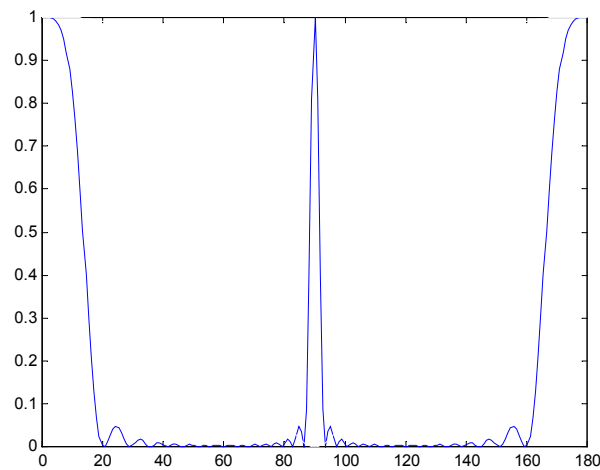
Les directions des lobes images dépendent de la fréquence

Pour éliminer les directions autres que θ_a , on peut imaginer remplacer les capteurs omnidirectionnels par des capteurs directifs.

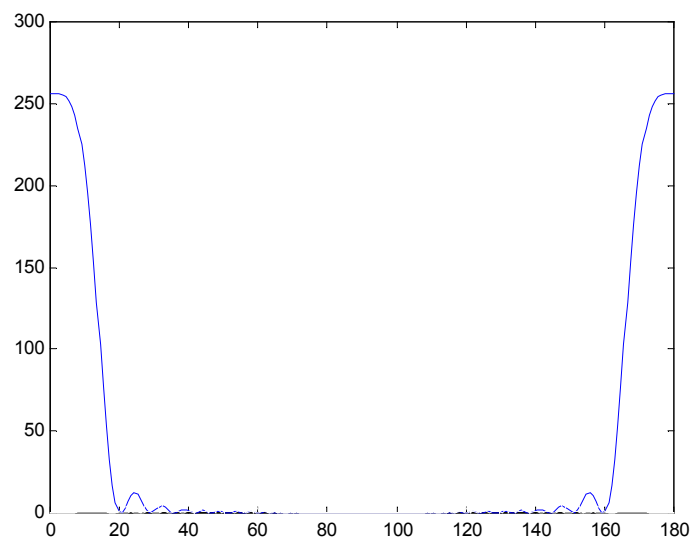
Si donc l'on remplace chaque capteur de l'antenne par un doublet écarté de a dont on fait la différence des signaux, on peut éliminer parfaitement le signal dans la direction transverse $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$ puisque la fonction de directivité du doublet en question sera :

$$\frac{1}{4} \left| 1 - \exp\left(2i\pi \frac{a}{\lambda} \cos \theta\right) \right|^2 = \sin^2\left(\pi \frac{a}{\lambda} \cos \theta\right)$$

La courbe en pointillé de la figure suivante correspond à la fonction de directivité du doublet ci-dessus. La fonction de directivité d'un réseau de doublet résultera du produit de la fonction de directivité du réseau (courbe continue de la figure suivante) par la fonction de directivité du doublet.



Cette propriété est illustrée par la figure suivante.



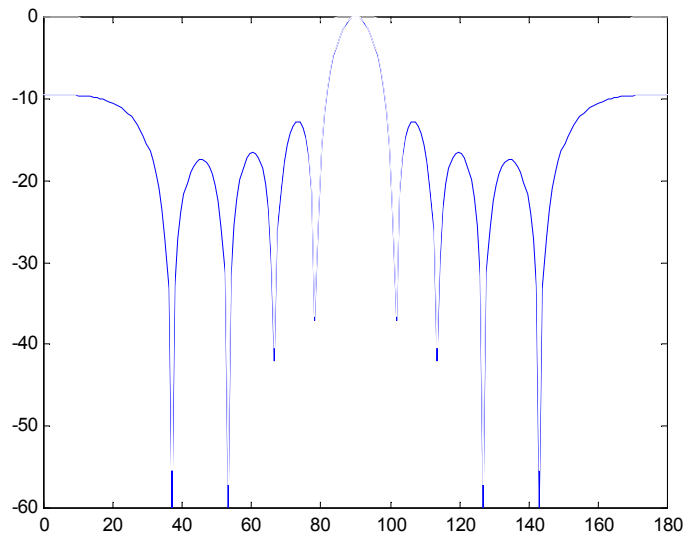
Elimination du lobe principal par un réseau de doublet

Sur un thème très voisin on peut discuter du problème de l'antenne partiellement en panne dont les capteurs pairs ont un gain divisé par 2.

La fonction de directivité du doublet élémentaire est donnée par :

$$\begin{aligned} \left| 1 + 0.5 \exp(2i\pi \frac{a}{\lambda} \cos \theta) \right|^2 &= \left(1 + 0.5 \cos(2\pi \frac{a}{\lambda} \cos \theta) \right)^2 + \left(0.5 \sin(2\pi \frac{a}{\lambda} \cos \theta) \right)^2 \\ &= 1.25 + \cos(2\pi \frac{a}{\lambda} \cos \theta) \end{aligned}$$

La fonction de directivité de cette antenne est donnée sur la figure suivante.



Fonction de directivité de l'antenne complète (continu), du réseau et du motif (pointillé)

On en déduit le niveau du lobe secondaire le plus gênant :

$$SL = 20 \text{Log} \left(\frac{1-0.5}{1+0.5} \right) = -9.5 \text{dB}$$

Exercice 9 : Interpolation de SHANNON tronquée

Evaluer l'erreur commise en tronquant la formule de SHANNON. Etude spécifique du cas où l'instant d'interpolation est égal à $\frac{T_e}{2}$, la moitié de la période d'échantillonnage, pour un bruit blanc de bande égale à $F_e = T_e^{-1}$. Evolution de l'erreur en fonction du nombre de coefficients d'interpolation.

La formule d'interpolation de SHANNON permet de calculer un signal $x(t)$ à un instant t quelconque en fonction des valeurs $\{x(kT_e)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ du signal aux instants d'échantillonnage.

$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(kT_e) \text{sinc}(\pi F_e (t - kT_e))$$

Dans le cas particulier où $t = \frac{T_e}{2}$, on a :

$$\sin c\left(\pi F_e \left(\frac{T_e}{2} - kT_e\right)\right) = \sin c\left(\frac{\pi}{2}(2k-1)\right) = \frac{2(-1)^k}{\pi(2k-1)}$$

La formule de SHANNON tronquée consiste à ne retenir qu'un nombre fini d'échantillons dans la formule de SHANNON précédente. Le résultat obtenu n'est plus alors qu'une approximation de la valeur exacte. Bien que cela ne soit pas explicitement dit, il est préférable, pour minimiser l'erreur, de retenir les coefficients d'interpolation dominants.

De la formule précédente, on écrira :

$$\hat{x}_N\left(\frac{T_e}{2}\right) = \sum_{k=-N,+N} \left(\frac{2}{\pi}\right) \frac{(-1)^k}{(2k-1)} x(kT_e)$$

L'indice N associé à $\hat{x}_N(\cdot)$ indique qu'il s'agit d'une approximation à l'ordre N .

L'erreur d'interpolation est alors définie par :

$$e_N\left(\frac{T_e}{2}\right) = \hat{x}_N\left(\frac{T_e}{2}\right) - x\left(\frac{T_e}{2}\right)$$

Il s'agit d'une variable aléatoire dont la variance est :

$$\begin{aligned} \varepsilon_N^2 &= E\left\{e_N^2\left(\frac{T_e}{2}\right)\right\} \\ &= \frac{4}{\pi^2} \sum_{k,l} \frac{(-1)^{k+l}}{(2k-1)(2l-1)} \rho((k-l)T_e) + \rho(0) - \frac{4}{\pi} \sum_{k=-N,+N} \frac{(-1)^k}{(2k-1)} \rho\left((2k-1)\frac{T_e}{2}\right) \end{aligned}$$

Dans cette formule $\rho(\cdot)$ désigne la fonction de corrélation du processus $x(t)$.
Pour un processus blanc dans la bande F_e , on a :

$$\rho(\tau) = \sin c(\pi F_e \tau)$$

Dans ce cas, on en déduira :

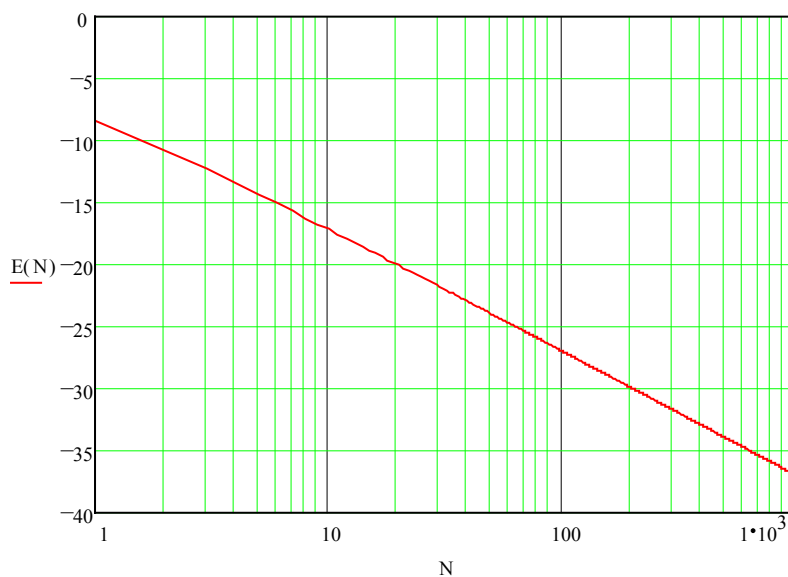
$$\rho\left((2k-1)\frac{T_e}{2}\right) = \frac{(-1)^k}{(2k-1)} \quad \text{et} \quad \rho((k-l)T_e) = \delta(k-l)$$

d'où il vient :

$$\varepsilon_N^2 = 1 - \frac{4}{\pi^2} \left\{ \sum_{k=-N}^{k=+N} (2k-1)^{-2} \right\}$$

Et c'est un résultat connu que la série $[(2n-1)^{-2}; n > 1]$ converge vers $\frac{\pi^2}{8}$, mais que cette convergence est très lente (en N^{-1}).

A titre illustratif, on peut tracer l'erreur commise en fonction de N :



Erreur d'interpolation résultant de la troncature de la formule de SHANNON

La présentation ci-dessus est en fait une démonstration du théorème de SHANNON pour un processus stochastique particulier et une valeur particulière de l'instant d'interpolation.

On peut reprendre l'exercice pour un processus blanc, mais dans une bande $B < F_e$.

On aura toujours :

$$\hat{x}_N\left(\frac{T_e}{2}\right) = \sum_{k=-N,+N} \left(\frac{2}{\pi}\right) \frac{(-1)^k}{(2k-1)} x(kT_e) \quad \text{avec} \quad w_k = \left(\frac{2}{\pi}\right) \frac{(-1)^k}{(2k-1)}$$

$$= \sum_{k=-N,+N} w_k x(kT_e)$$

On écrit aussi :

$$\hat{x}_N\left(\frac{T_e}{2}\right) = \underline{W}^T \underline{X} \quad \text{où} \quad \underline{X} = \text{col}\{x(kT_e)\}_{k=-N,+N} \quad \text{et} \quad \underline{W} = \text{col}\{w_k\}_{k=-N,+N}$$

L'erreur quadratique moyenne d'interpolation s'écrit :

$$\varepsilon_N^2 = \rho(0) + \underline{W}^T \underline{R} \underline{W} - 2 \underline{W}^T \underline{P}$$

avec $R_{kl} = \rho((k-l)T_e)$

et $(\underline{P})_k = \rho\left((2k-1)\frac{T_e}{2}\right) = E\left\{x(kT_e)x\left(\frac{T_e}{2}\right)\right\}$

Pour un processus blanc dans une bande B, la fonction de corrélation s'écrit :

$$\rho(\tau) = \sin c(\pi B \tau)$$

L'erreur s'écrit alors :

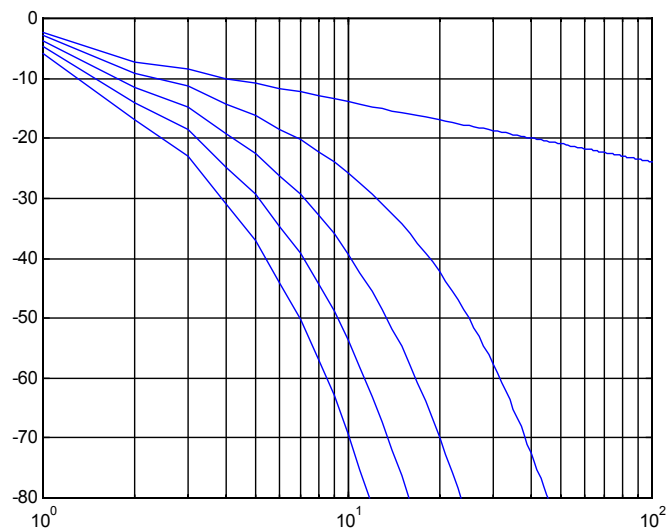
$$\varepsilon_N^2 = 1 + \underline{W}^T \underline{R} \underline{W} - 2 \underline{W}^T \underline{P}$$

On peut introduire $\underline{W}_0 = R^{-1} \underline{P}$ et décomposer $\underline{W} = \underline{W}_0 + (\underline{W} - \underline{W}_0)$ dans l'expression de l'erreur ε_N^2 , ce qui donne :

$$\varepsilon_N^2 = 1 - \underline{W}_0^T \underline{R} \underline{W}_0 + (\underline{W} - \underline{W}_0)^T \underline{R} (\underline{W} - \underline{W}_0)$$

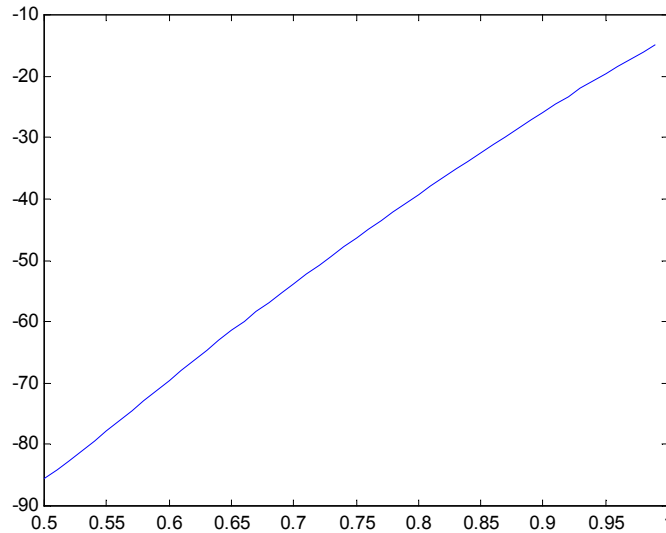
On constatera alors sur cette formule que \underline{W}_0 sera un meilleur filtre interpolateur que \underline{W} (du moins si $\underline{W} \neq \underline{W}_0$, ce qui n'est pas le cas pour $B=F_e$). \underline{W}_0 est le filtre d'interpolation de WIENER, conçu pour minimiser l'erreur quadratique moyenne.

Le tracé de l'erreur totale en fonction de N pour diverses valeurs du facteur de suréchantillonnage est donné sur la figure suivante :



Cette figure montre que l'erreur d'interpolation est considérablement réduite avec les coefficients de WIENER, à condition que la bande soit nettement plus faible que la fréquence d'échantillonnage. Par exemple, pour un rapport $(B/F_e) = 0.7$, l'erreur d'interpolation diminue de -14 dB à -55 dB pour un nombre de coefficients d'interpolation égal à 10.

On peut tracer l'erreur d'interpolation, le nombre N de coefficients d'interpolation étant fixés, en fonction du facteur de suréchantillonnage.



Erreur d'interpolation de WIENER en fonction de la bande du signal

Il est également très instructif de s'intéresser à la densité spectrale du processus d'erreur

$$e(t) = \hat{x}(t - \tau) - x(t - \tau)$$

$$= \left(\sum_k w_k \delta(t - kT_e) - \delta(t - \tau) \right) * x(t)$$

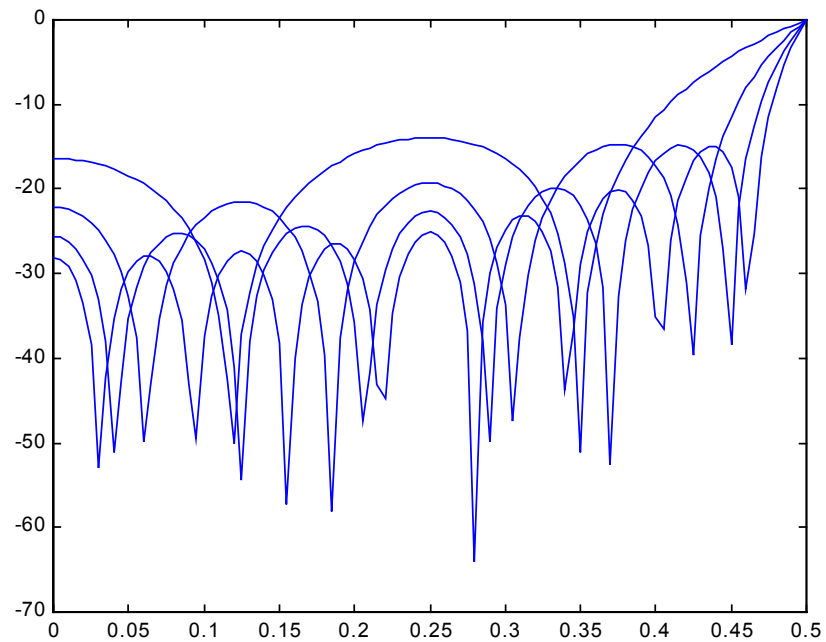
la densité spectrale de ce processus sera :

$$\gamma_e(f) = \gamma_x(f) \left| \sum_k w_k e^{-2i\pi f k T_e} - e^{-2i\pi f \tau} \right|^2$$

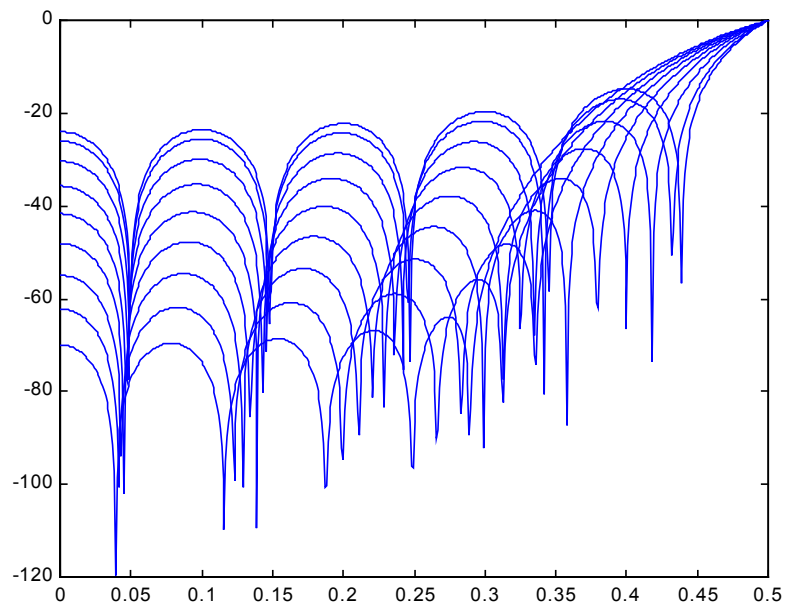
on a $\gamma_x(f) = \frac{1}{B} \text{rect}\left(\frac{f}{B}\right)$

La densité spectrale de l'erreur est donnée sur les figures qui suivent pour diverses valeurs de N et $\theta = \frac{B}{F_e}$.

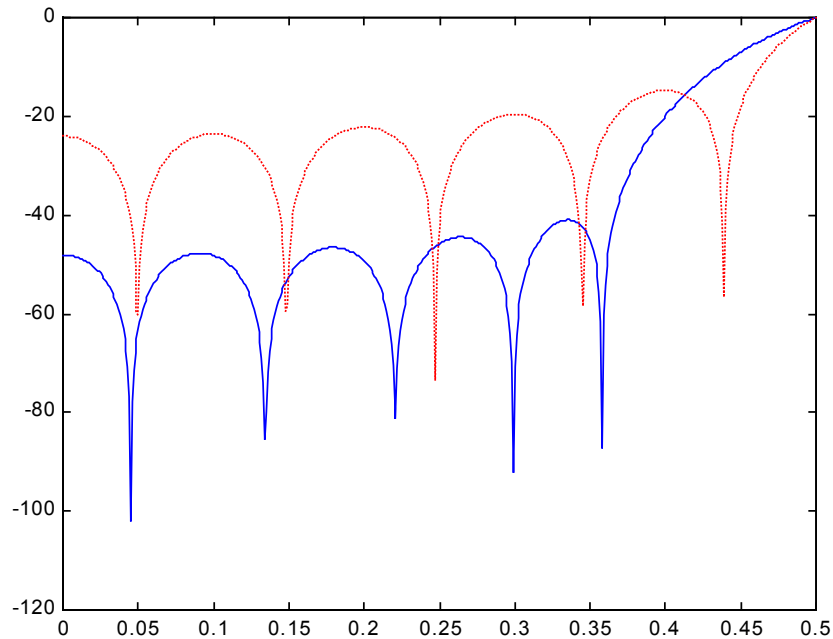
La figure suivante représente la distribution spectrale de l'erreur pour un bruit blanc.



Distribution spectrale de l'erreur de l'interpolation de SHANNON tronquée L=4,8,12,16



Distribution spectrale de l'erreur de l'interpolation de WIENER pour L=10.
La bande relative varie entre 0.6 et 1.0 par pas de 0.05.



Comparaison des distributions spectrales de l'erreur d'interpolation de WIENER (Continu) et de celle de SHANNON (pointillé) $L=10$; $\theta=0.75$

La figure précédente compare les distributions spectrales des erreurs d'interpolation de WIENER et de SHANNON tronqué. Elle démontre que, dans ce cas particulier (10 coefficients d'interpolation, facteur de suréchantillonnage de 25%), l'erreur de WIENER est répartie préférentiellement dans la zone de fréquence comprise entre 0.4 et 0.5 fois la fréquence d'échantillonnage, alors que l'erreur de SHANNON est répartie de manière plus uniforme dans toute la bande entre 0 et 0.5. On constatera que, en l'absence de suréchantillonnage, l'interpolation de WIENER est identique à celle de SHANNON.

Exercice 10 : Cohérence spatiale d'un bruit isotrope sphérique

Calculer la matrice de cohérence spatiale J , pour du bruit engendré par des générateurs infinitésimaux et statistiquement indépendants. Ces générateurs sont distribués uniformément sur une sphère suffisamment grande pour que l'on puisse considérer que les surfaces d'ondes sont planes au niveau de l'antenne (champ lointain).

Dans le cas d'un bruit d'origine électronique, la matrice $J(f)$ est la matrice identité, ou, éventuellement, une matrice diagonale.

Dans le cas d'un bruit ambiant, il est d'usage de considérer que cette matrice s'écrit comme une superposition de sources infinitésimales indépendantes statistiquement:

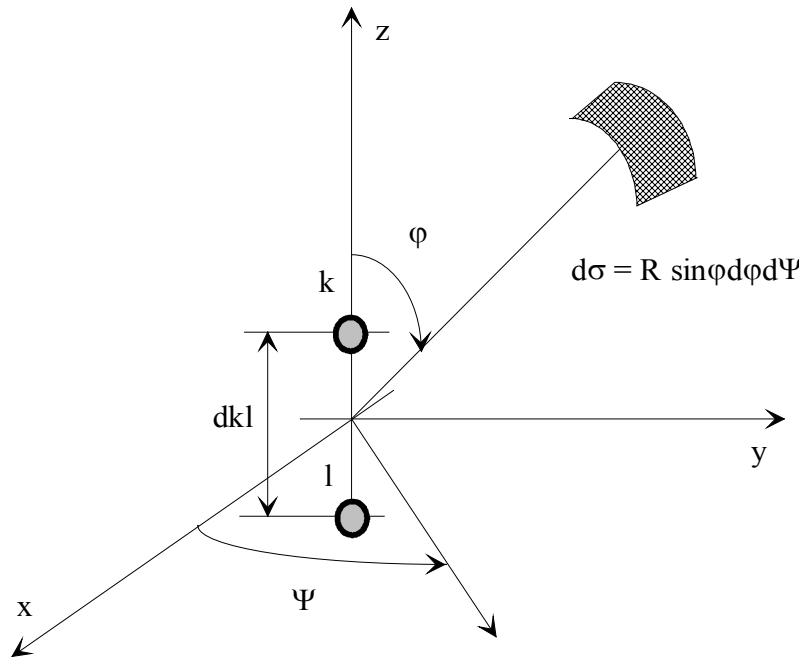
$$J(f) = \int_{\Omega} p(\omega) \underline{d}(\omega) \underline{d}^+(\omega) d\omega$$

Dans cette expression $p(\omega)$ est une densité de probabilité décrivant la répartition spatiale des générateurs de bruits. Ici il s'agira d'une loi de répartition uniforme sur une sphère.

Le terme général de cette matrice s'écrira donc :

$$J_{kl} = \int_{\Omega} p(\omega) (\underline{d}(\omega) \underline{d}^+(\omega))_{kl} d\omega$$

Le couple (k,l) de capteurs est utilisé pour définir un repère dans lequel on effectue le calcul. Les sources sont définies par leurs coordonnées sphériques (R, φ, ψ)



Repère pour le calcul de J_{kl} .

L'élément différentiel de surface sphérique étant $R \sin \varphi d\varphi d\psi$

En appliquant la condition de normalisation, on peut écrire :

$$p(\omega)d\omega = \frac{1}{4\pi} \sin \varphi d\varphi d\psi$$

L'espace Ω est défini par :

$$\Omega = \{(\varphi, \psi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]\}$$

On obtient par ailleurs :

$$\left[\underline{d}_{\omega} \underline{d}_{\omega}^+ \right]_{kl} = \exp\left(\frac{2i\pi}{\lambda} d_{kl} \cos \varphi\right)$$

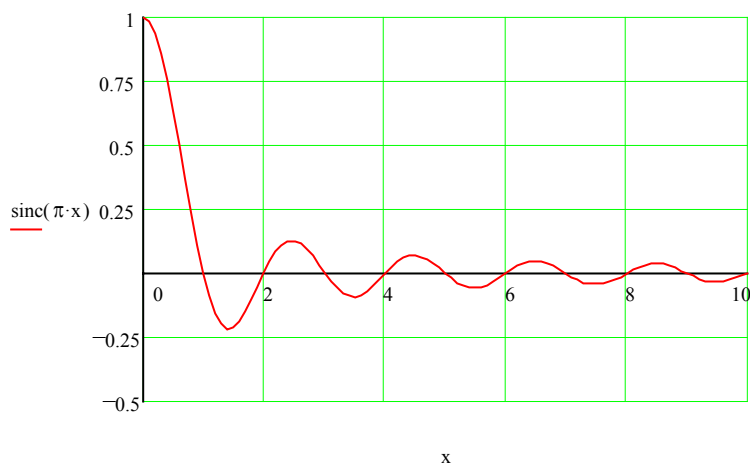
où d_{kl} désigne la distance séparant les capteurs (k, l) .

Finalement :

$$\begin{aligned} J_{kl} &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} d\varphi \sin \varphi \exp\left(\frac{2i\pi}{\lambda} d_{kl} \cos \varphi\right) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \exp\left(2i\pi \frac{d_{kl}}{\lambda} u\right) du \\ &= \text{sinc}\left(2\pi \frac{d_{kl}}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

On remarquera que le résultat de ce calcul ne fait pas intervenir le choix du repère initial.

On peut tracer la fonction de cohérence spatiale du bruit en fonction de l'écart $\frac{d_{kl}}{\lambda}$.



Cohérence spatiale d'un bruit isotrope sphérique

Cette courbe montre que le bruit est le plus souvent corrélé entre capteurs, sauf lorsque $\frac{d}{\lambda}$ est un multiple de $\frac{1}{2}$ (Antenne linéaire périodique de pas $\frac{\lambda}{2}$).

En dehors de cette situation exceptionnelle, le bruit isotrope sphérique est corrélé. On remarquera également que cette courbe présente parfois des valeurs négatives, ce qui correspond à des corrélations négatives, favorables à l'augmentation du gain d'antenne.

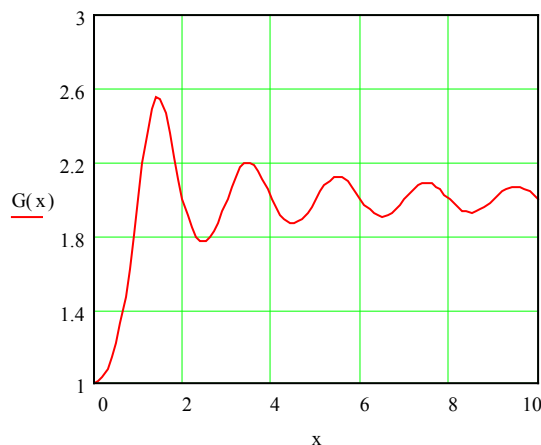
Considérons une antenne à 2 capteurs, dont on fait la somme. Le filtre spatial correspondant est donc :

$$\underline{h} = \text{col}(1,1)$$

et le gain d'antenne est :

$$\begin{aligned} G &= \frac{4}{\underline{h}^T J \underline{h}} \\ &= \frac{2}{1 + \sin c(2\pi \frac{d}{\lambda})} \end{aligned}$$

Si on trace G en fonction de d, on voit que l'on peut obtenir un gain d'antenne bien supérieur à 2.



Gain d'antenne dans du bruit isotrope sphérique