

Égalisation robuste du canal de communication numérique

Vicente Zarzoso

Pierre Comon

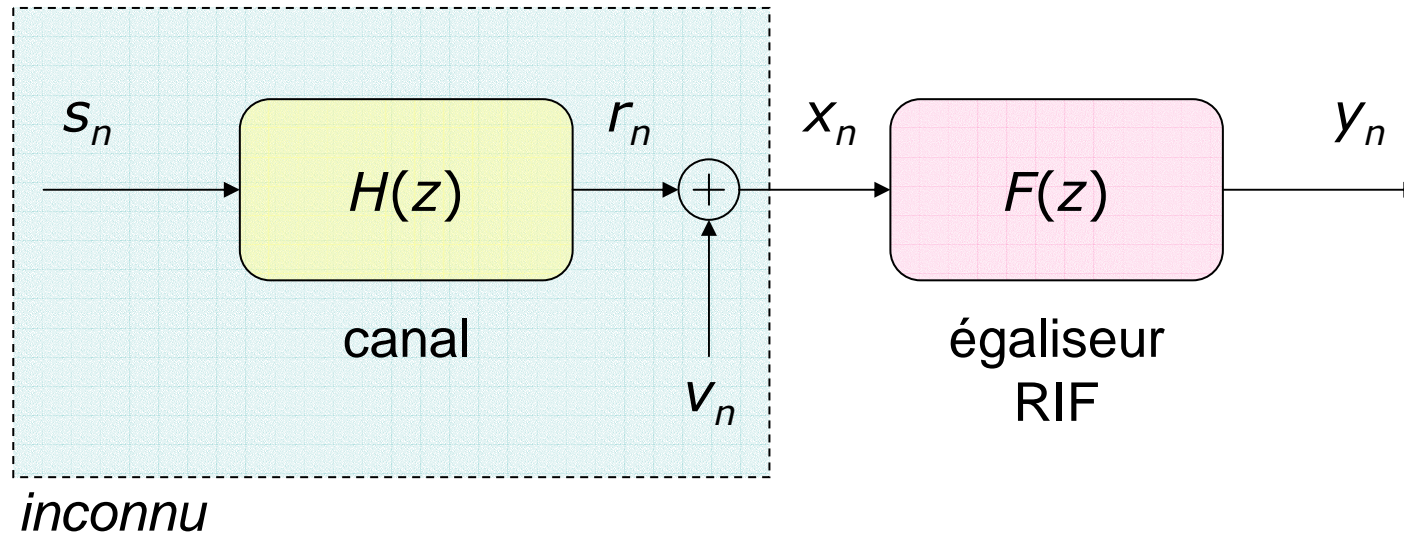


Séminaire pôle SIS, Laboratoire I3S, 22 mai 2008

Sommaire

- Position du problème
- Égalisation informée et aveugle
- Critères semi-aveugles
- Recherche itérative à pas optimal
- Exemples illustratifs
- Résumé, conclusions, perspectives
- Bibliographie

Position du problème



$$x_n = r_n + v_n = \sum_k h_k s_{n-k} + v_n \quad n = 0, 1, \dots, N_d - 1$$

$$y_n = \sum_{k=0}^{L-1} f_k^* x_{n-k} = \mathbf{f}^H \mathbf{x}_n$$

$$\mathbf{f} = [f_1, f_2, \dots, f_L]^T$$

$$\mathbf{x}_n = [x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-L+1}]^T$$

Égalisation informée (1/2)

- N_t symboles connus par le récepteur (séquence-pilote) :

$$\check{\mathbf{s}} = [\check{s}_0, \check{s}_1, \dots, \check{s}_{N_t-1}]^H$$

- **Critère MMSE** :

$$J_{\text{MMSE}}(\mathbf{f}) = E\{|y_n - \check{s}_n|^2\}$$

- **Solution algébrique** : *least squares (LS)*

$$\check{\mathbf{X}} = [\mathbf{x}_{L-1}, \mathbf{x}_L, \dots, \mathbf{x}_{L+N_t-2}]$$

$$\check{\mathbf{X}}^H \mathbf{f} = \check{\mathbf{s}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f}_{\text{LS}} = (\check{\mathbf{X}} \check{\mathbf{X}}^H)^{-1} \check{\mathbf{X}} \check{\mathbf{s}}$$

- **Solution itérative** : descente par gradient \rightarrow LMS

$$\mathbf{f}' = \mathbf{f} - \mu \nabla J_{\text{MMSE}}(\mathbf{f})$$

$$\nabla J_{\text{MMSE}}(\mathbf{f}) = 2E\{(y_n - \check{s}_n)^* \mathbf{x}_n\}$$

Égalisation informée (2/2)

😊 **Avantages :**

- simple et peu coûteuse
- efficace si séquence-pilote assez longue

😞 **Inconvénients :**

- réduit le débit utile du canal
- inefficace si séquence-pilote trop courte
- inefficace si synchronisation difficile
(e.g., systèmes non-coopératifs)

Égalisation aveugle (1/5)

- Restaurer une propriété connue du signal d'entrée

- **Critère à module constant** (*constant modulus, CM*) :

$$J_{\text{CM}}(\mathbf{f}) = \mathbb{E}\{(|y_n|^2 - \gamma)^2\}$$

[Godard, TCom'80]

[Treichler-Agee, TASSP'83]

- **Critère à puissance constante** (*constant power, CP*) :

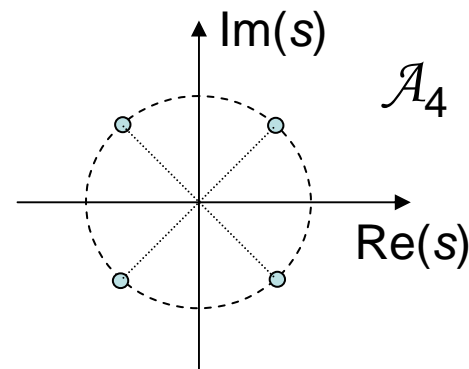
$$J_{\text{CP}}(\mathbf{f}) = \mathbb{E}\{|y_n^q - d|^2\}$$

[Grellier-Comon, SPL'98]

[Comon, IJACSP'04]

Exemple : source QPSK

$$s^4 = -1 \Rightarrow (q, d) = (4, -1)$$



Égalisation aveugle (2/5)

- **Solutions itératives** : descente par gradient

$$\mathbf{f}' = \mathbf{f} - \mu \nabla J(\mathbf{f})$$

- *constant modulus algorithm (CMA)* :

$$\nabla J_{\text{CM}}(\mathbf{f}) = 4 \mathbb{E}\{y_n^* (|y_n|^2 - \gamma) \mathbf{x}_n\}$$

- *constant power algorithm (CPA)* :

$$\nabla J_{\text{CP}}(\mathbf{f}) = 2q \mathbb{E}\{y_n^{q-1} (y_n^q - d)^* \mathbf{x}_n\}$$



gradient bloc préférable au gradient stochastique

Égalisation aveugle (3/5)

😊 **Avantages :**

- utilise efficacement la largeur de bande disponible
- soulage les besoins de synchronisation

☹️ **Inconvénients :**

- indétermination d'amplitude et/ou de phase
- complexité de calcul importante
- volume de données (taille de bloc) élevée
- convergence lente
- minima locaux à performance sous-optimale
- dépendance de l'initialisation

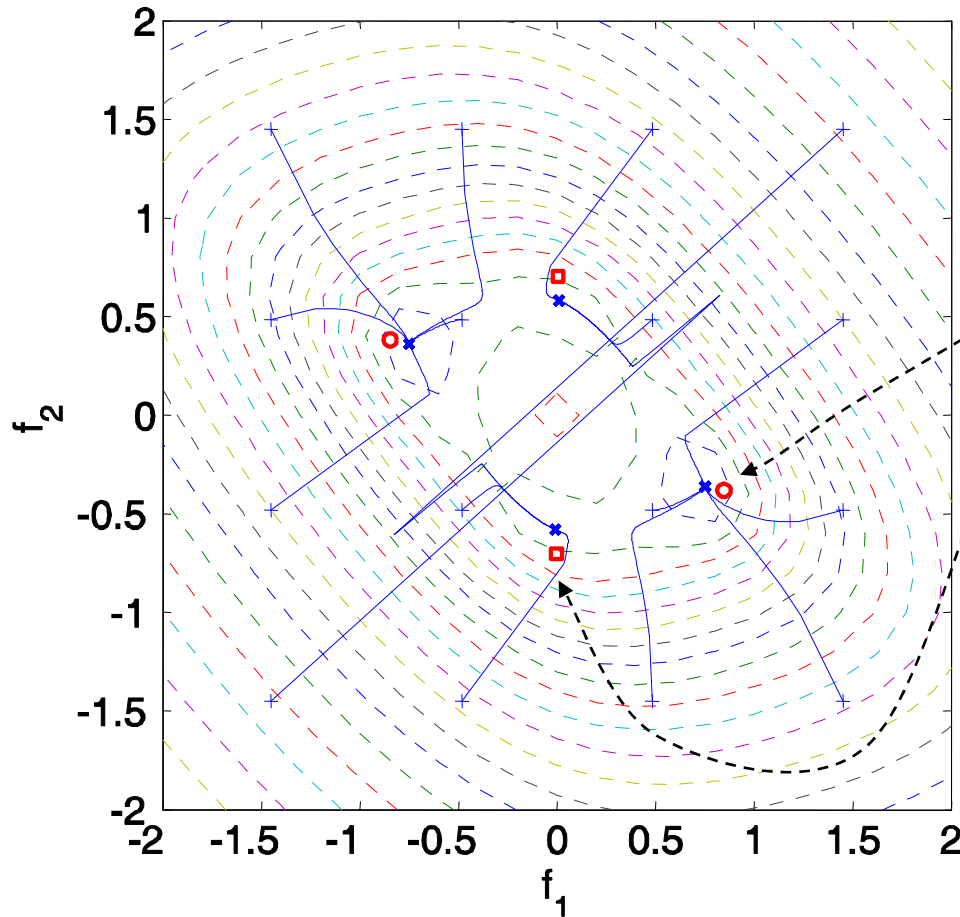
[Ding *et al.*, TCom'91]

[Ding *et al.*, TSP'92]

Égalisation aveugle (4/5)

Exemple : CPA

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}} \quad |z| > 0.5$$



source BPSK $\rightarrow q = 2$

SNR = 10 dB

$MSE_0 = -9$ dB

$MSE_1 = -5$ dB

$N_d = 200$ symboles

$\mu = 10^{-2}$

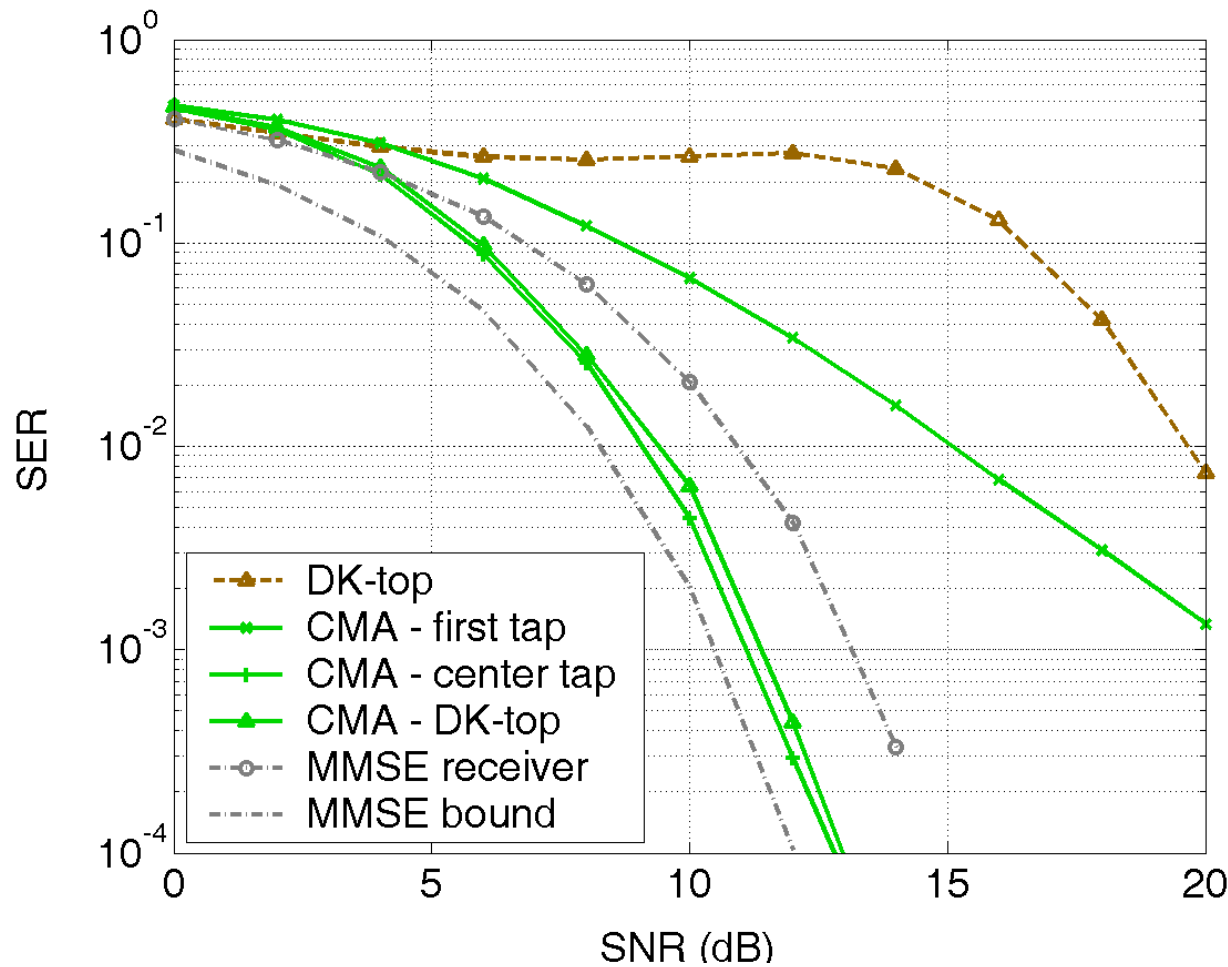
#itérations : 422

[Zarzoso-Comon, TSP'05]

[Zarzoso-Comon, Hermes'07]

Égalisation aveugle (5/5)

Exemple : CMA, canal RIF d'ordre 6 à phase non-minimale



source QPSK

$L = 5$

$N_d = 100$ symboles

$\mu = 10^{-3}$

500 répétitions MC

[Zarzoso-Comon, ICASSP'05]

[Zarzoso-Comon, Hermes'07]

Stratégies d'égalisation robuste

- Systèmes multi-canaux [Li-Ding, TSP'96]
- Algorithmes type RLS [Chen *et al.*, TSP'04]
- Solutions algébriques (ACMA, ACPA)
[Van der Veen - Paulraj, TSP'96]
[Dogançay-Kennedy, TSP'99]
[Zarzosó-Comon, TSP'05]
- **Critères semi-aveugles**
- **Optimisation itérative à pas optimal**
[Zarzosó-Comon, EUSIPCO'05]
[Zarzosó-Comon, ICASSP'05]
[Zarzosó-Comon, TSP'05]
[Zarzosó-Comon, Hermes'07]
[Zarzosó-Comon, TCom'08]

Critères semi-aveugles (1/7)

- Combinaison linéaire d'un critère informé (MMSE) et d'un critère aveugle (CM, CP, ...)
- **CM semi-aveugle** (*semi-blind CM, SB-CM*)

$$J_{\text{SB-CM}}(\mathbf{f}) = \lambda J_{\text{MMSE}}(\mathbf{f}) + (1 - \lambda) J_{\text{CM}}(\mathbf{f})$$

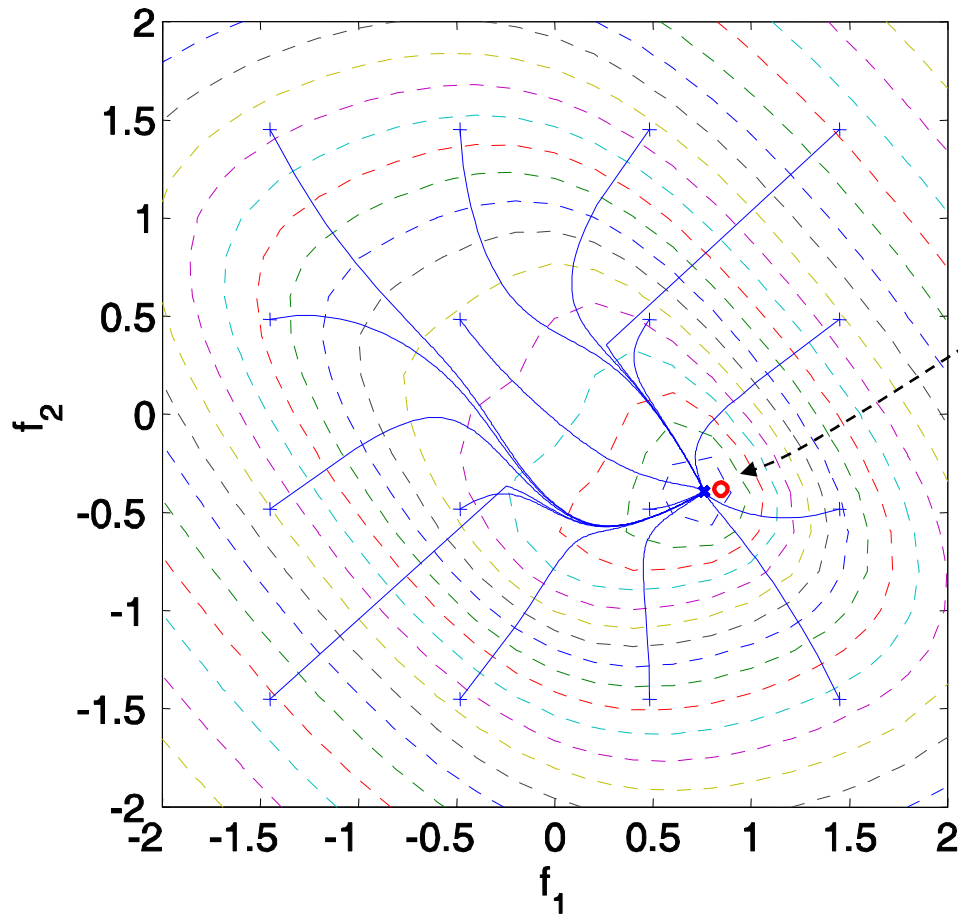
- **CP semi-aveugle** (*semi-blind CP, SB-CP*)

$$J_{\text{SB-CP}}(\mathbf{f}) = \lambda J_{\text{MMSE}}(\mathbf{f}) + (1 - \lambda) J_{\text{CP}}(\mathbf{f})$$

Critères semi-aveugles (2/7)

Exemple : SB-CPA

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}} \quad |z| > 0.5$$



source BPSK $\rightarrow q = 2$

SNR = 10 dB

$MSE_0 = -9$ dB

$N_d = 200$ symboles

$\mu = 10^{-2}$

$N_t = 10$ symboles-pilotes

$\lambda = 0.5$

#itérations : 363

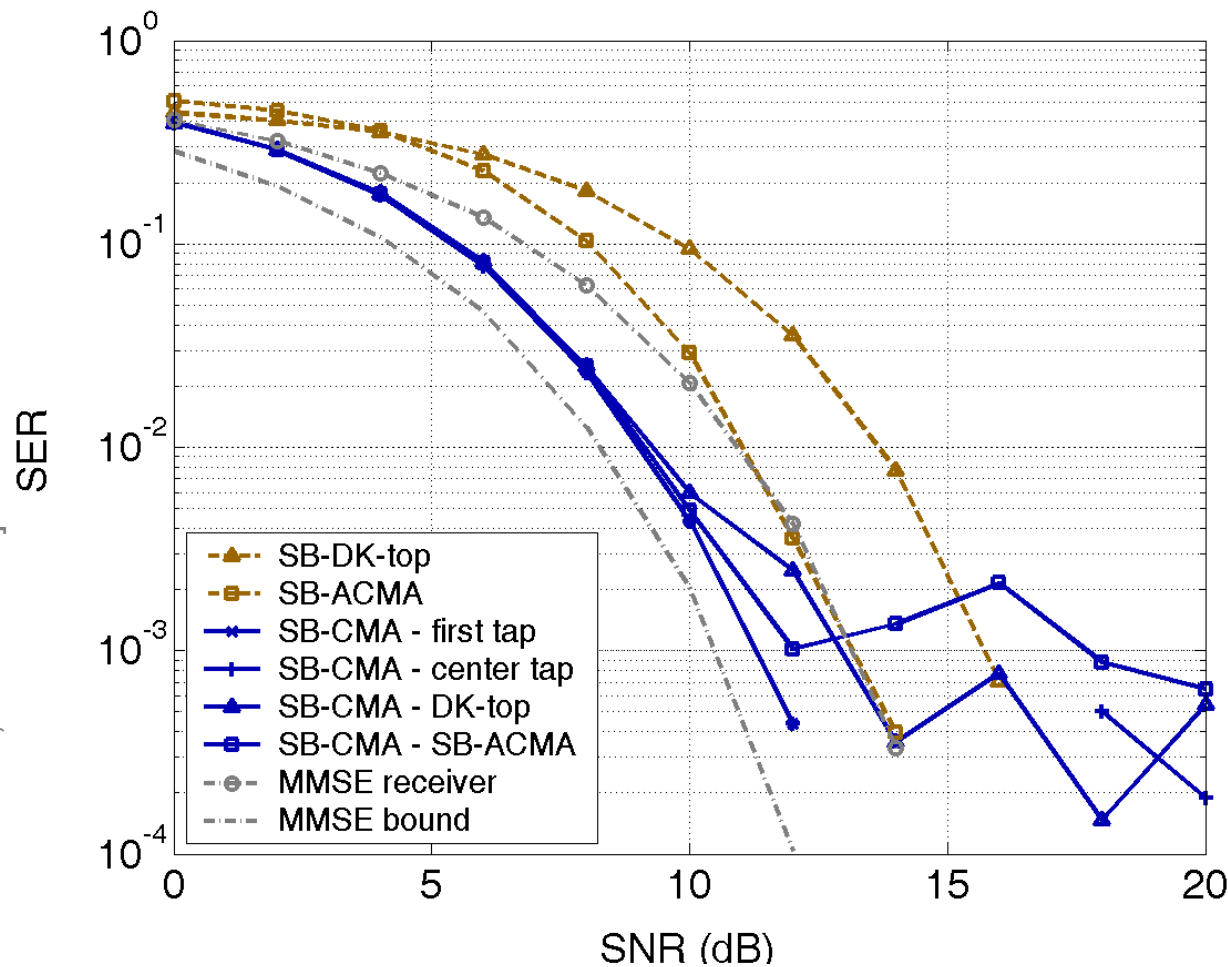
(CPA : 422)

[Zarzoso-Comon, TSP'05]

[Zarzoso-Comon, Hermes'07]

Critères semi-aveugles (3/7)

Exemple : SB-CMA, canal RIF d'ordre 6 à phase non-minimale



source QPSK

$L = 5$

$N_d = 100$ symboles

$\mu = 10^{-3}$

500 répétitions MC

10% entraînement

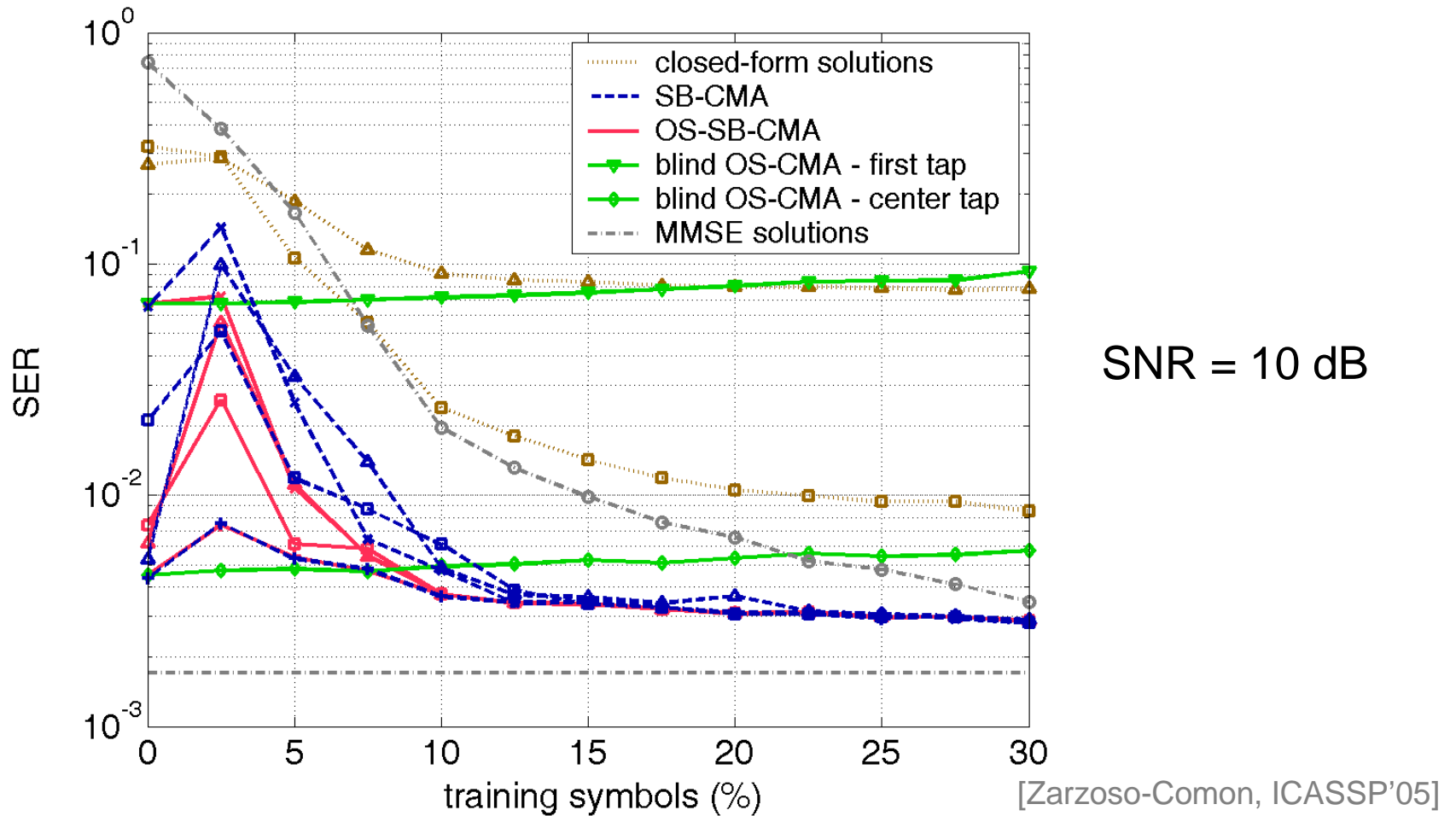
$\lambda = 0.5$

[Zarzoso-Comon, ICASSP'05]

[Zarzoso-Comon, Hermes'07]

Critères semi-aveugles (4/7)

Influence de la longueur de la séquence-pilote



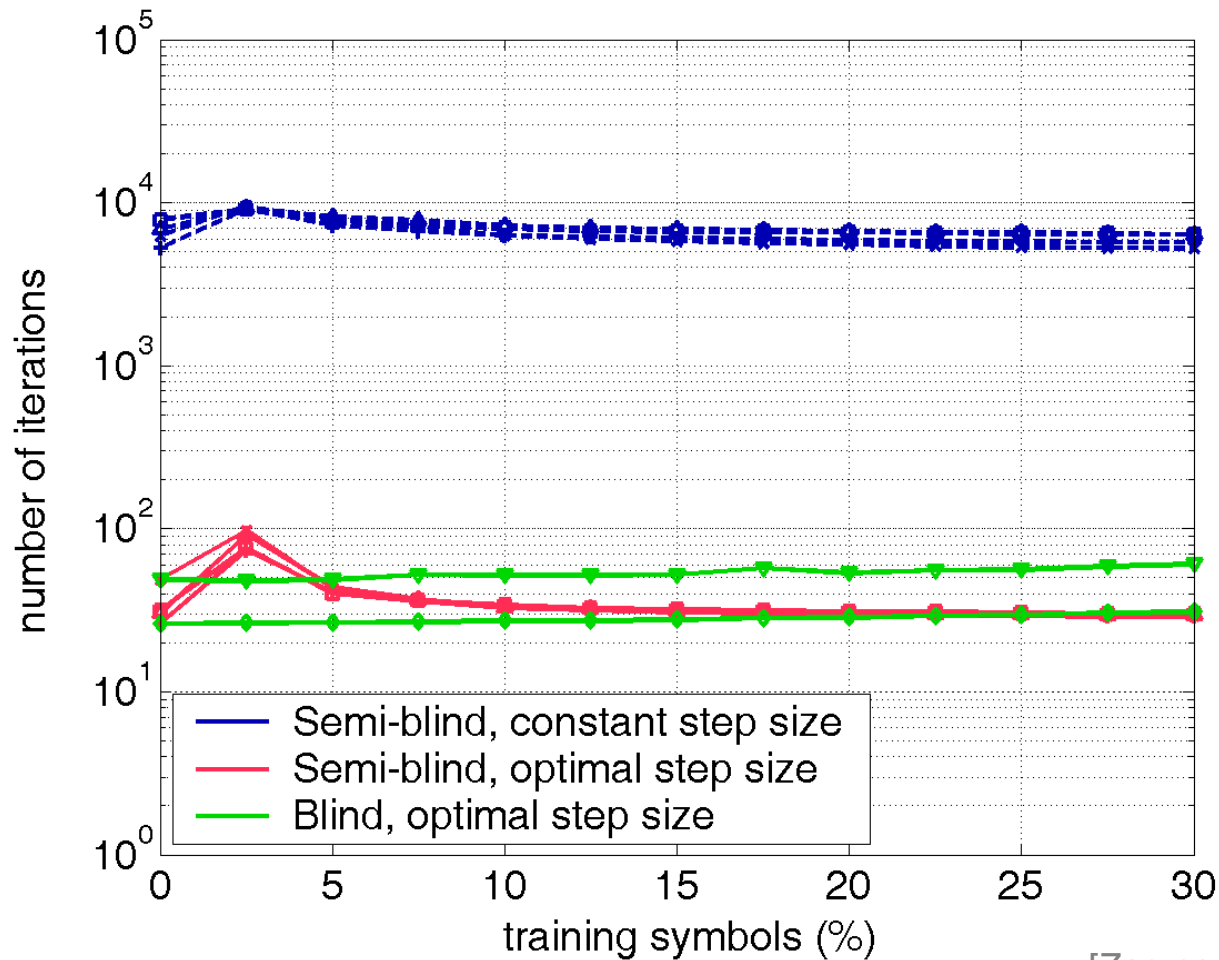
SNR = 10 dB

[Zarzoso-Comon, ICASSP'05]

[Zarzoso-Comon, Hermes'07]

Critères semi-aveugles (5/7)

Influence de la longueur de la séquence-pilote

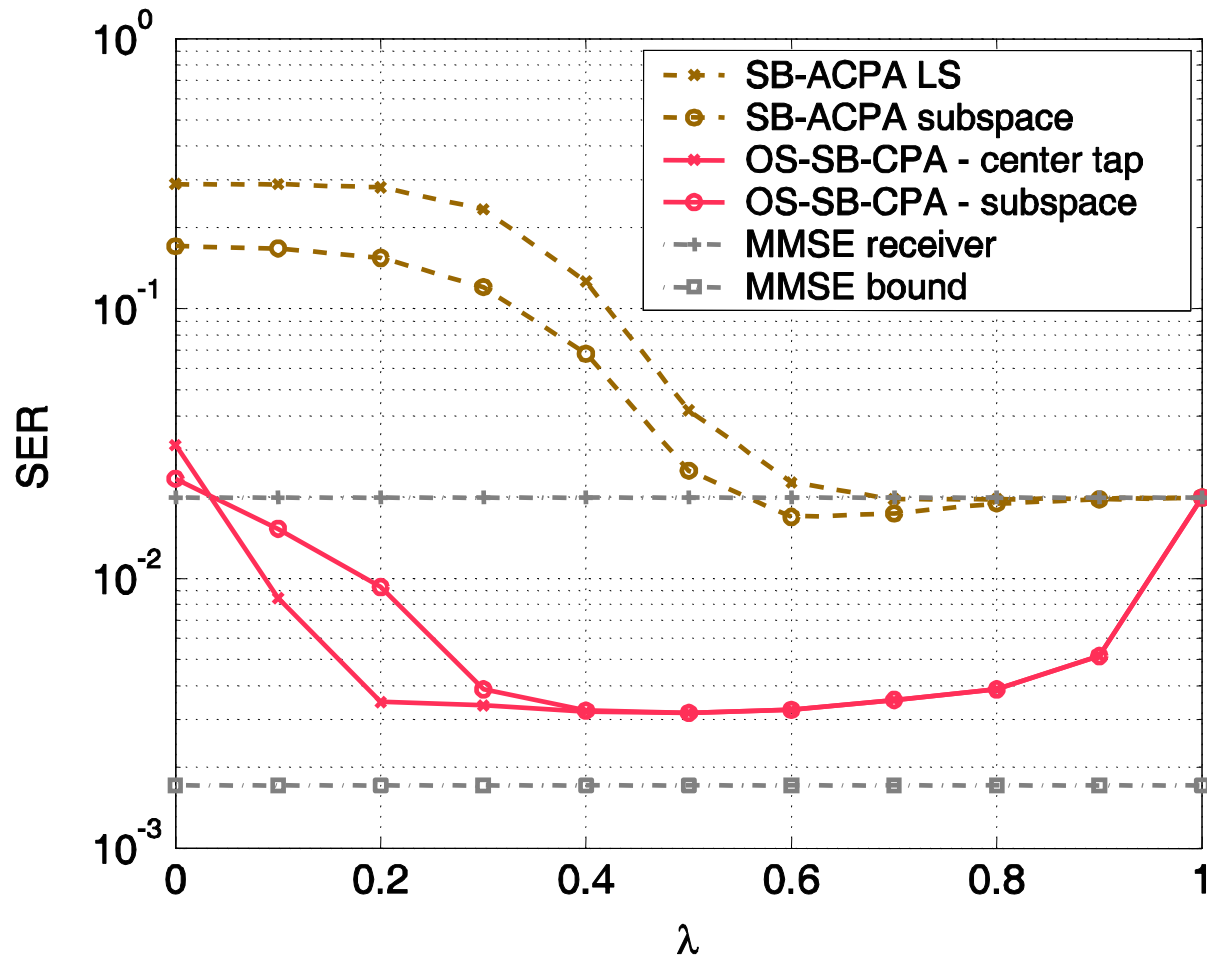


[Zarzoso-Comon, ICASSP'05]

[Zarzoso-Comon, Hermes'07]

Critères semi-aveugles (6/7)

Influence du paramètre de confiance λ (critère SB-CP)



source QPSK $\rightarrow q = 4$

$L = 5$

$N_d = 100$ symboles

500 répétitions MC

SNR = 10 dB

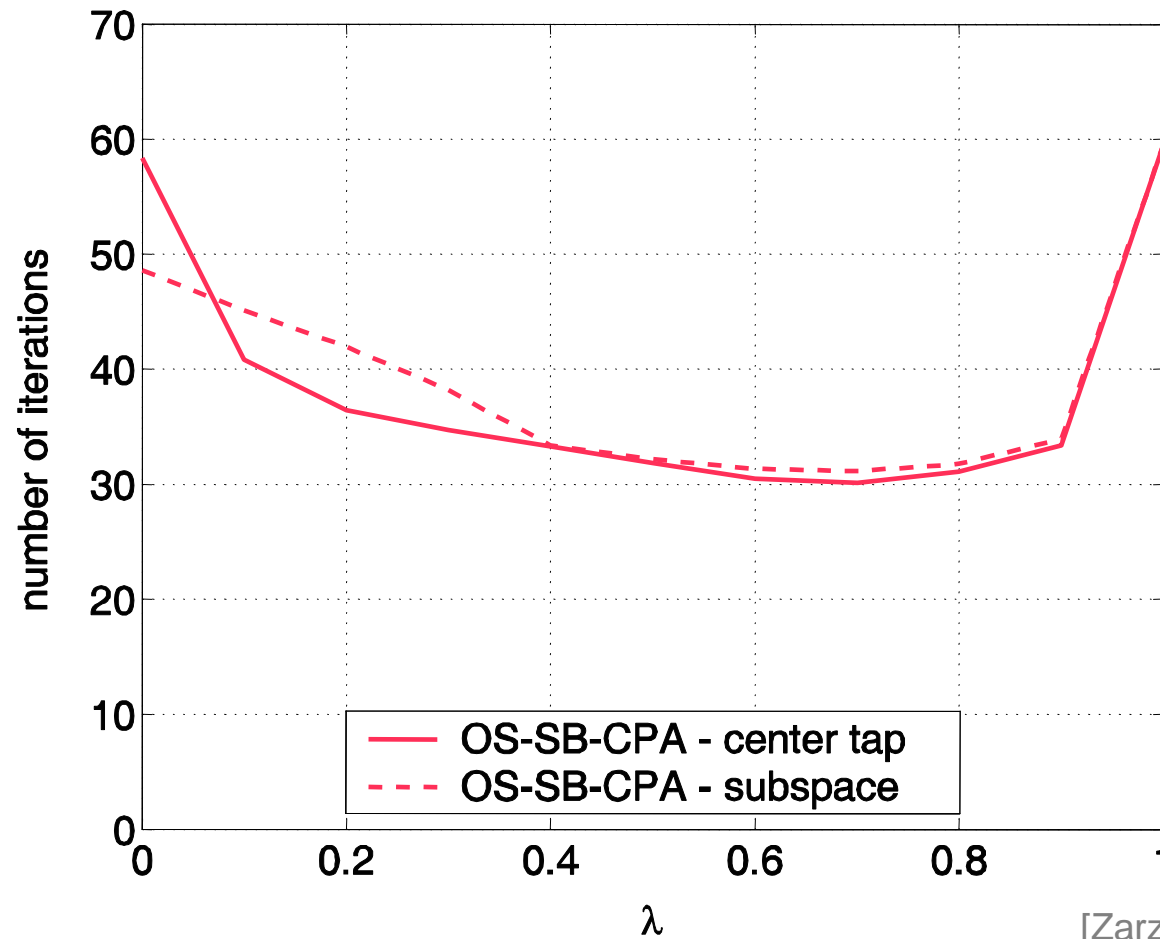
10% entraînement

[Zarzoso-Comon, TSP'05]

[Zarzoso-Comon, Hermes'07]

Critères semi-aveugles (7/7)

Influence du paramètre de confiance λ



[Zarzoso-Comon, TSP'05]

[Zarzoso-Comon, Hermes'07]

Recherche itérative à pas optimal (1/8)

$$\mathbf{f}' = \mathbf{f} - \mu \mathbf{g}$$

- Pas d'adaptation μ : compromis vitesse – précision
- **Pas optimal** :

$$\mu_{\text{opt}} = \arg \min_{\mu} J(\mathbf{f} - \mu \mathbf{g})$$

→ minimum global de J dans la direction de recherche \mathbf{g}

$$\frac{\partial J(\mathbf{f} - \mu \mathbf{g})}{\partial \mu} = \rho(\mu ; \mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{x}_n) = 0$$

[Grellier-Comon, SPL'98]

[Comon, IJACSP'04]

[Xu-Li, ComLet'04]

- CM, CP, ... : $\rho(\mu ; \mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{x}_n)$ est un polynôme en μ
→ μ_{opt} peut être trouvé de manière algébrique (sans itérations !)

Recherche itérative à pas optimal (2/8)

- Critère CM :

$$p(\mu) = b_3\mu^3 + b_2\mu^2 + b_1\mu + b_0$$

$$b_3 = 2E\{a_n^2\} \quad b_2 = 3E\{a_nb_n\}$$

$$b_1 = E\{2a_nc_n + b_n^2\} \quad b_0 = E\{b_nc_n\}$$

$$a_n = |g_n|^2 \quad b_n = -2\text{Re}(y_n g_n^*) \quad c_n = |y_n|^2 - \gamma$$

$$y_n = \mathbf{f}^H \mathbf{x}_n \quad g_n = \mathbf{g}^H \mathbf{x}_n$$

[Zarzoso-Comon, EUSIPCO'05]

[Zarzoso-Comon, TCom'08]

- Critère CP : $p(\mu)$ est un polynôme de degré $(2q - 1)$

[Zarzoso-Comon, ICASSP'05]

- Critère MMSE : polynôme de degré 1

[Zarzoso-Comon, TSP'05]

Recherche itérative à pas optimal (3/8)

S1) Calculer les coefficients de $p(\mu)$

– fonction de \mathbf{f} , \mathbf{g} et \mathbf{x}_n

S2) Déterminer les racines $\{\mu_k\}$ de $p(\mu)$

– formules algébriques (radicaux) pour degrés < 5

• degré 3 : Cardano ; degré 4 : Ferrari

S3) Sélectionner la racine optimale

$$\mu_{\text{opt}} = \arg \min_{\mu_k} J(\mathbf{f} - \mu_k \mathbf{g})$$

S4) Mettre à jour et vérifier convergence

$$\mathbf{f}' = \mathbf{f} - \mu_{\text{opt}} \mathbf{g} \quad \frac{\|\mathbf{f}' - \mathbf{f}\|}{\|\mathbf{f}\|} < \eta / N_d$$

Recherche itérative à pas optimal (4/8)

- Complexité de calcul

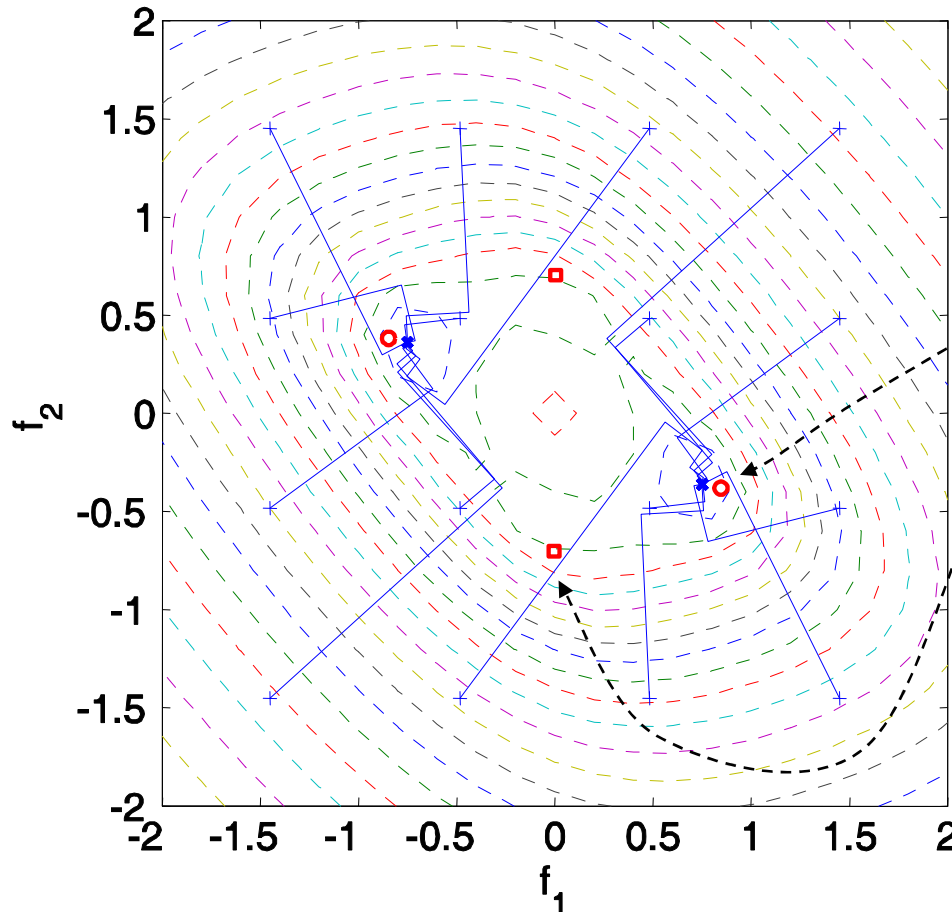
algorithme	CMA	OS-CMA	OS-CPA
coût per itération (flops)	$2N(L+1)$	$N(3L+10)$	$N[3L + q(q+4)]$

[Zarzoso-Comon, Hermes'07]

Recherche itérative à pas optimal (5/8)

Exemple : OS-CPA

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}} \quad |z| > 0.5$$



source BPSK $\rightarrow q = 2$

SNR = 10 dB

$MSE_0 = -9$ dB

$MSE_1 = -5$ dB

$N_d = 200$ symboles

#itérations : 11

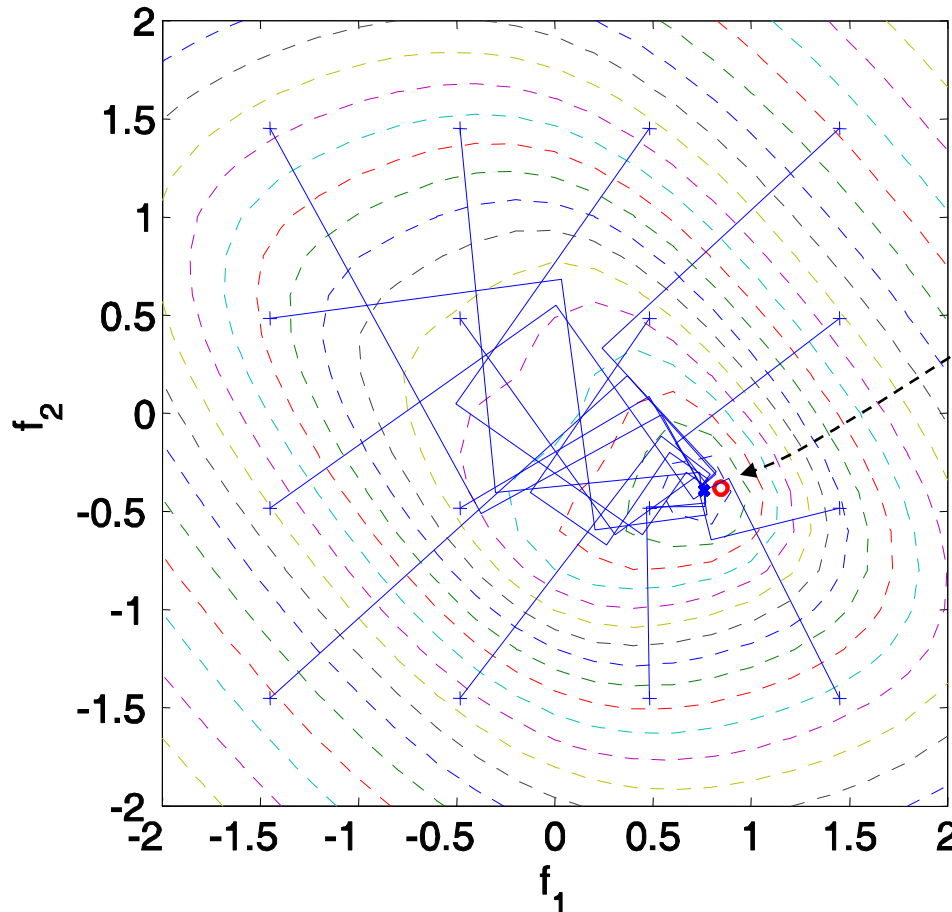
(CPA : 422)

[Zarzoso-Comon, TSP'05]
[Zarzoso-Comon, Hermes'07]

Recherche itérative à pas optimal (6/8)

Exemple : OS-SB-CPA

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}} \quad |z| > 0.5$$



source BPSK $\rightarrow q = 2$

SNR = 10 dB

$MSE_0 = -9$ dB

$N_d = 200$ symboles

$N_t = 10$ symboles-pilotes

$\lambda = 0.5$

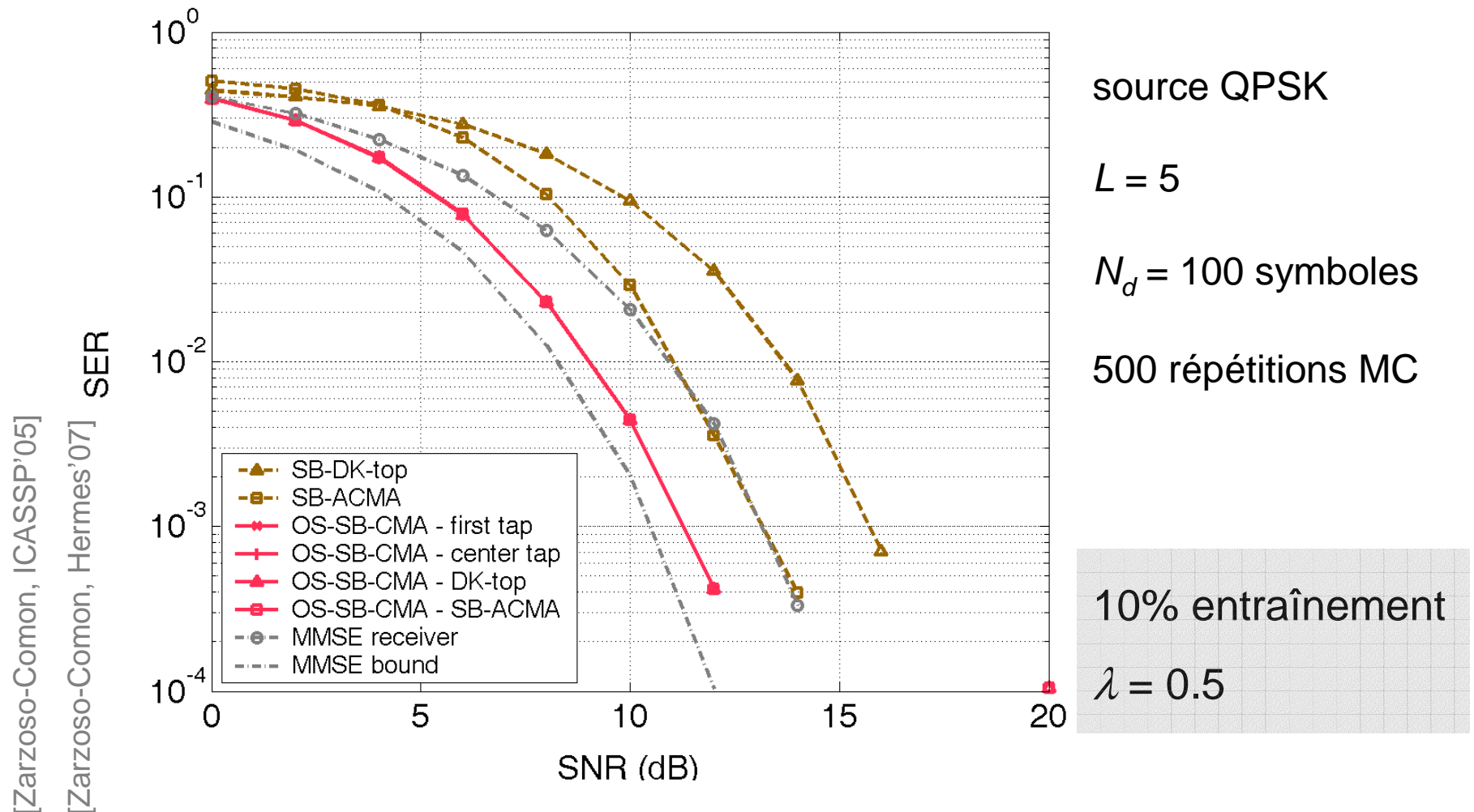
#itérations : 9

(SB-CPA : 363)

[Zarzoso-Comon, TSP'05]
[Zarzoso-Comon, Hermes'07]

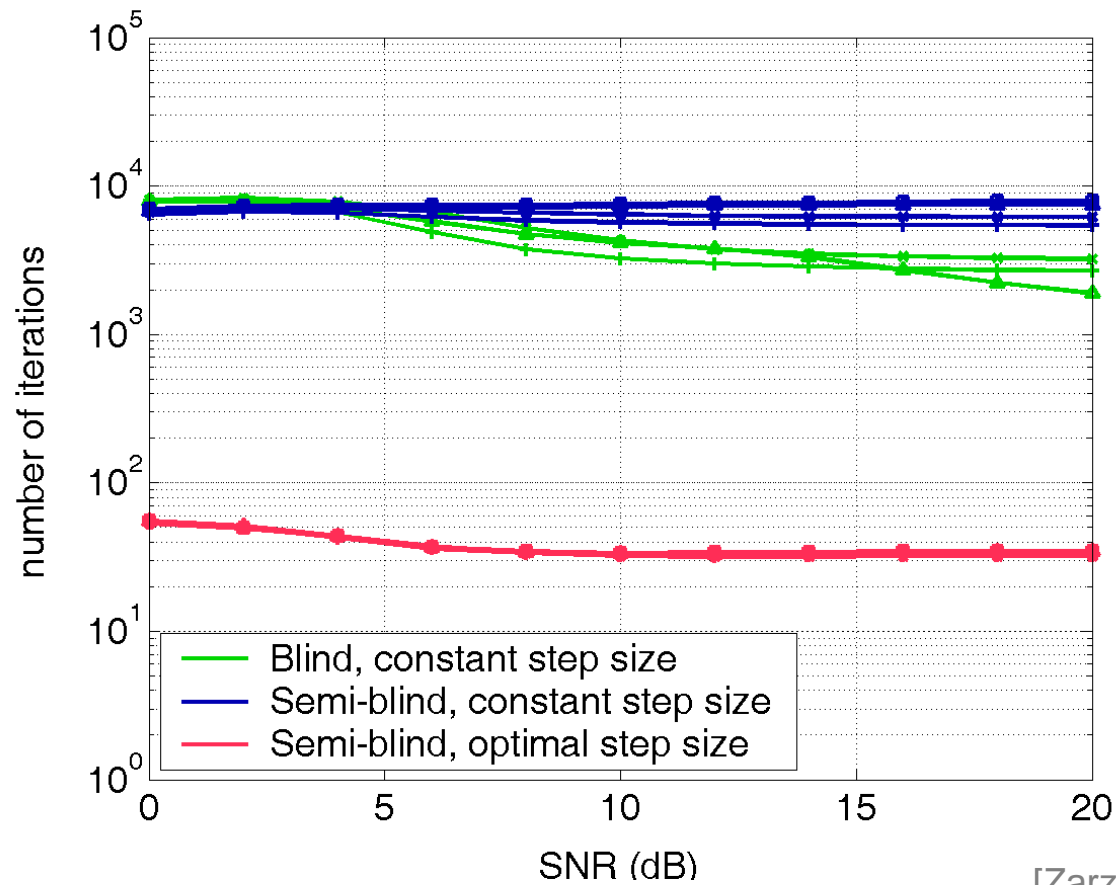
Recherche itérative à pas optimal (7/8)

Example : OS-SB-CMA, canal RIF ordre 6 phase non-minimale



Recherche itérative à pas optimal (8/8)

Complexité



[Zarzoso-Comon, ICASSP'05]

[Zarzoso-Comon, Hermes'07]

Résumé et conclusions

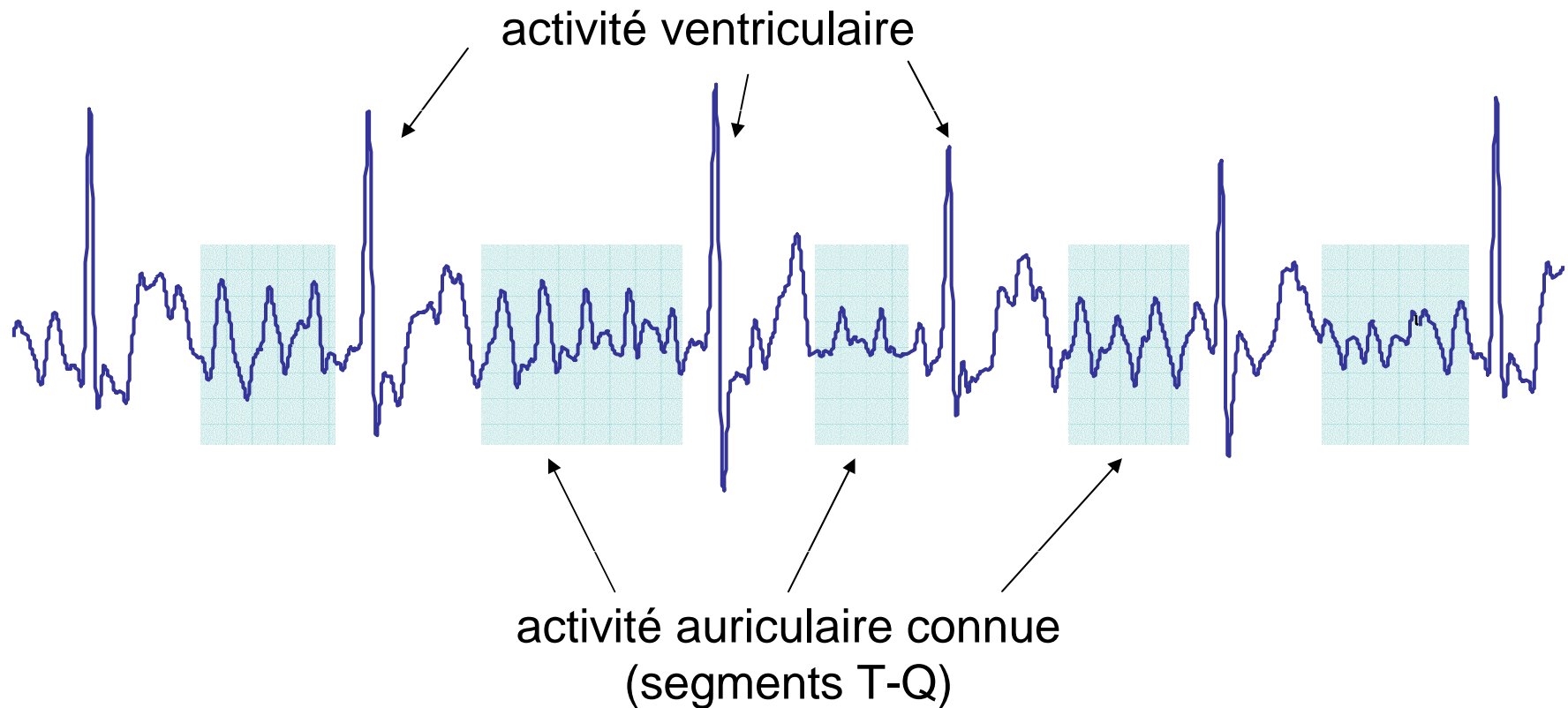
- Égalisation du canal de communication numérique
- Inconvénients critères informés et aveugles
 - réduction du débit utile du canal
 - minima locaux, initialisation, convergence lente
- Stratégies :
 - critères semi-aveugles
 - recherche itérative à pas optimal
- Impact :
 - augmentation du débit utile du canal
 - robustesse par rapport aux minima locaux
 - robustesse par rapport à l'initialisation
 - convergence accélérée

Perspectives

- Choix optimal
 - paramètre λ
 - % symboles-pilotes
- Analyse convergence du pas optimal
- Application du pas optimal à d'autres problèmes
 - PARAFAC [Rajih-Comon-Harshman, SIAM J. Mat. Anal. Appl.'08]
 - ICA/BSS [Zarzoso-Comon-Kallel, EUSIPCO'06]
- Comparaison avec d'autres principes d'égalisation
- Extension à d'autres types de canaux (SIMO, MIMO, non-linéaires, ...)

Perspectives – domaine biomédical

- Application à l'analyse de la **fibrillation auriculaire**



Bibliographie

Chen, Le-Ngoc, Champagne, Xu, "Recursive least squares constant modulus algorithm for blind adaptive array," *IEEE Trans. Sig. Proc.*, 52(5):1452-6, May 2004.

Comon, "Contrasts, independent component analysis, and blind deconvolution," *Int. J. Adaptive Control & Signal Processing (Special Issue on Blind Signal Separation)*, 18(3):225-43, Apr. 2004.

Ding, Kennedy, Anderson, Johnson, "Ill-convergence of Godard blind equalizers in data communication systems," *IEEE Trans. Commun.*, 39(9):1313-27, Sep. 1991.

Ding, Johnson, Kennedy, "On the (non)existence of undesirable equilibria of Godard blind equalizers," *IEEE Trans. Signal Process.*, 40(10):2425-32, Oct. 1992.

Dogançay, Kennedy, "Least squares approach to blind channel equalization," *IEEE Trans. Signal Process.*, 47(11):1678-87, Nov. 1999.

Godard, "Self-recovering equalization and carrier tracking in twodimensional data communication systems," *IEEE Trans. Commun.*, 28(11):1867-75, Nov. 1980.

Grellier, Comon, "Blind separation of discrete sources," *IEEE Signal Process. Lett.*, 5(8):212-4, Aug. 1998.

Li, Ding, "Global convergence of fractionally spaced Godard (CMA) adaptive equalizers," *IEEE Trans. Signal Processing*, 44(4):818-26, Apr. 1996.

Rajih, Comon, Harshman, "Enhanced line search: a novel method to accelerate PARAFAC", *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 2008.

Bibliographie

Treichler, Agee, “A new approach to multipath correction of constant modulus signals,” *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, 31(2):459-72, Apr. 1983.

Van der Veen, Paulraj, “An analytical constant modulus algorithm,” *IEEE Trans. Signal Process.*, 44(5):1136-55, May 1996.

Xu, Li, “A batch processing constant modulus algorithm,” *IEEE Communications Letters*, 8(9):582-4, Sept. 2004.

Zarzoso, Comon, “Blind channel equalization with algebraic optimal step size”, in: *Proc. EUSIPCO-2005*, Antalya, Turkey, Sep. 4-8, 2005.

Zarzoso, Comon, “Semi-blind CM equalization with optimal step size”, in: *Proc. ICASSP-2005*, Philadelphia, PA, Mar. 18–23, 2005, vol. III, pp. 577-580.

Zarzoso, Comon, “Blind and semi-blind equalization based on the CP criterion”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, 53(11):4363-75, Nov. 2005.

Zarzoso, Comon, « Méthodes semi-aveugles pour les télécommunications », Jutten, Comon (Eds.), *Séparation de sources 2*, Paris, Hermès, 2007, chap. 8, pp. 303-353.

Zarzoso, Comon, Kallel, “How fast is FastICA ?”, in: *Proc. EUSIPCO-2006*, Florence, Italy, Sept. 4-8, 2006.

Zarzoso, Comon, “Optimal step-size constant modulus algorithm”, *IEEE Trans. Communications*, 56(1):10-13, Jan. 2008.