Chapitre 1 : Intégrales définies.

La théorie de l'intégration est issue de la nécessité pratique de calculer les aires et les volumes.

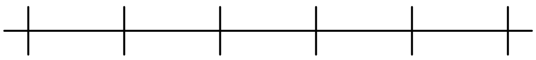
Dans tout le chapitre, nous ne considérerons que des fonctions continues.

I. Construction de l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$, *f* continue sur [a ; b] :

1. Subdivision de l'intervalle [a ; b] :

La subdivision de l'intervalle [a ; b], en n intervalles de même amplitude, est la suite $x_0, x_1, \ldots, x_n$

avec $x_0 = a$ $\quad x_1 = a + \frac{b-a}{n}$ $\quad \ldots \quad x_k = a + k\,\frac{b-a}{n}$ $\quad \ldots \quad x_n = b$



2. Définition de $\int_a^b f(t)dt$ pour *f* positive

Document 1 : On pose $S_n^- = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \min_{t\in[x_k\,;x_{k+1}]}\left(f(t)\right) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \min_{[x_k\,;x_{k+1}]}\left(f(t)\right)$

Document 2 : On pose $S_n^+ = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \max_{t\in[x_k\,;x_{k+1}]}\left(f(t)\right) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \max_{[x_k\,;x_{k+1}]}\left(f(t)\right)$

Propriétés de S_n^- et S_n^+ :

- S_n^- est croissante et majorée.
- S_n^+ est décroissante et minorée.
- $\lim_{n\to+\infty}\left(S_n^+ - S_n^-\right) = 0$
- $\left(S_n^-\right)$ et $\left(S_n^+\right)$ sont des suites adjacentes, elles convergent vers la même limite.

On pose $\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} S_n^- = \lim_{n\to+\infty} S_n^+$.

3. Définition de $\int_a^b f(t)dt$ pour *f* quelconque

On pose
$$f^+(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } f(t) \geq 0 \\ 0 & \text{si } f(t) < 0 \end{cases}$$
$$f^-(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(t) \geq 0 \\ -f(t) & \text{si } f(t) < 0 \end{cases}$$

On a les propriétés suivantes : $\forall t \in [a\,;\,b]$
$$f^+(t) \geq 0$$
$$f^-(t) \geq 0$$
$$f(t) = f^+(t) - f^-(t)$$

$\int_a^b f^+(t)dt$ et $\int_a^b f^-(t)dt$ sont définies puisque f^+ et f^- sont continues et positives sur [a ; b].

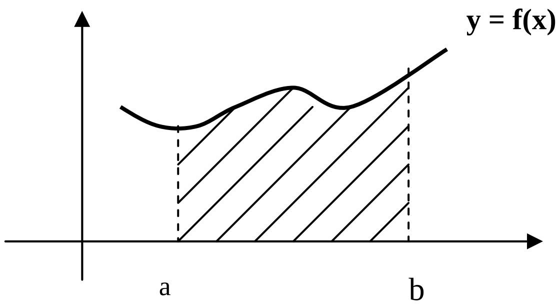
On pose $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f^+(t)dt - \int_a^b f^-(t)dt$.

II. Interprétation géométrique de l'intégrale :

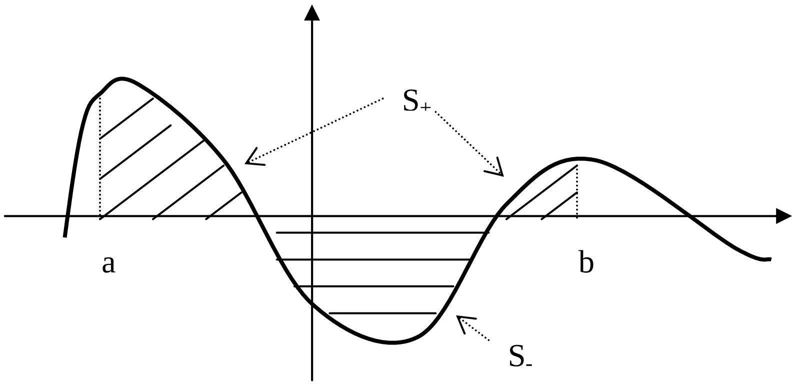
- Dans le cas d'une fonction f positive,

$\int_a^b f(x)dx$ mesure « l'aire sous la courbe »,

c'est à dire l'aire de l'ensemble des points (x ; y) tels que $a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$.



- Dans le cas d'une <u>fonction *f* de signe quelconque</u>,
  $\int_a^b f(x)dx$ représente l'aire sous la courbe (et au dessus de l'axe des abscisses) moins l'aire sur la courbe (et au dessous de l'axe des abscisses).



$$\int_a^b f(x)dx = S_+ - S_-$$

III. Propriétés.

P1. Linéarité : $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$ ($\lambda \in \mathbb{R}$).

P2. Relation de Chasles : Soit c∈]a ; b[$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

P3. $\int_a^a f(x)dx = 0$.

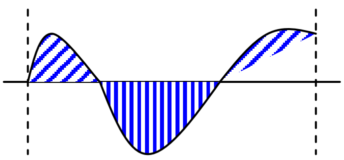
P4. $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.

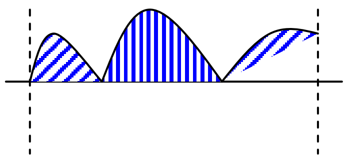
P5. Si f est <u>positive</u> alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ (a < b),

$\int_a^b f(x)dx = 0 \Rightarrow$ f(x) = 0 $\forall x \in [a ; b]$

P6. Croissance : Si $\forall x \in [a ; b]$ $f(x) \leq g(x)$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

P7. Majoration : $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.





IV. Intégrales et primitives.

Notation : $\int f(x)dx$ désigne une primitive de f.

1. Intégrale fonction de sa borne supérieure.

Soit f : [a ; b] $\to \mathbb{R}$ continue. On définit la fonction G sur [a ; b] par G(x) = $\int_a^x f(t)\,dt$.

Propriété :	G est dérivable et G'(x) = f(x) $\forall x \in [a ; b]$. De plus G(a) = 0. G est la primitive de f qui s'annule en a.

Démonstration :

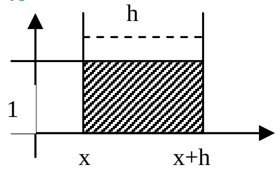
Montrons que G'(x) = f(x) c'est-à-dire que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{G(x+h)-G(x)}{h}$ = f(x)

Posons R(h) = $\dfrac{G(x+h)-G(x)}{h} - f(x)$ Montrons $\lim\limits_{h\to 0} R(h) = 0$

$$R(h) = \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^{x} f(t)dt}{h} - f(x)$$

$$R(h) = \frac{1}{h}\left(\int_x^{x+h} f(t)dt - hf(x)\right)$$

or $\int_x^{x+h} 1dt = 1\times h = h$



$$R(h) = \frac{1}{h}\left(\int_x^{x+h} f(t)dt - \int_x^{x+h} f(x)dt\right)$$

$$R(h) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \left(f(t) - f(x)\right)dt$$

Or f est continue sur [a ; b] et donc en x.

D'où $\forall \varepsilon>0$ $\exists \alpha>0$ $\forall t$ $|t-x| < \alpha$ $\Rightarrow$ $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$

Soit $\varepsilon>0$. Supposons $|h| < \alpha$

$$|R(h)| = \frac{1}{|h|}\left|\int_x^{x+h} \left(f(t) - f(x)\right)dt\right|$$

<u>1^er cas</u> : $h > 0$

$$| R(h) | \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt$$

$x \leq t \leq x + h$ donc $|t - x| < |h| < \alpha$

d'où $| f(t) - f(x) | < \varepsilon$

$$| R(h) | \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \varepsilon \, dt$$

$$| R(h) | \leq \varepsilon$$

<u>2^e cas</u> : $h < 0$

$$| R(h) | \leq \frac{1}{-h} \int_{x+h}^{x} |f(t) - f(x)| dt$$

$x + h \leq t \leq x$ donc $|t - x| < |h| < \alpha$

d'où $| f(t) - f(x) | < \varepsilon$

$$| R(h) | \leq \frac{1}{-h} \int_{x+h}^{x} \varepsilon \, dt$$

$$| R(h) | \leq \varepsilon$$

Donc $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall h \quad |h| < \alpha \Rightarrow \quad | R(h) | \leq \varepsilon$

$\lim_{h \to 0} R(h) = 0$ Donc $G'(x) = f(x)$.

<u>Exemples</u> :

- $\ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t} dt$

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

- $F(x) = \displaystyle\int_2^x \frac{1}{1+t^3} dt$ $\quad F'(x) = \dfrac{1}{1+x^3}$
- $G(x) = \displaystyle\int_7^x \frac{1}{1+t^3} dt$ $\quad G'(x) = \dfrac{1}{1+x^3}$.

2. Calcul d'une intégrale à partir d'une primitive.

Théorème : Si f est continue sur [a ; b] et F est une primitive de f sur [a ; b] alors

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \quad \text{ce que l'on note} \quad [F(t)]_a^b .$$

Démonstration : Posons $G(x) = \int_a^x f(t)dt$

$G'(x) = f(x)$ d'après la propriété ci-dessus.

Donc F et G sont 2 primitives de f. $\Rightarrow$ $\exists\, C \in \mathbb{R}$; $\forall x \in [a ; b]$ $G(x) = F(x) + C$

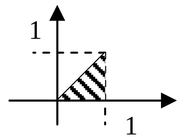
En a, on a $0 = G(a) = F(a) + C$ donc $C = - F(a)$

D'où $\int_a^b f(t)dt = G(b) = F(b) - F(a)$

Exemple :

- $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt = [\arctan(t)]_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$

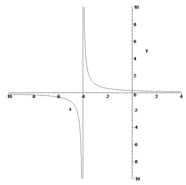
- $\int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$ En effet $S = \frac{1\times 1}{2}$



V. Méthodes de calculs d'intégrales.

1. Calcul à l'aide de primitives.

- Exemple de calcul direct.



$$\int_2^8 \frac{1}{t+4}dt = \left[\ \ln|t+4|\ \right]_2^8 = \ln(12) - \ln(6) = \ln(2) + \ln(6) - \ln(6) = \ln(2)$$

$$\int_{-10}^{-5} \frac{1}{t+4}dt = \left[\ \ln|t+4|\ \right]_{-10}^{-5} = \ln|-5 + 4| - \ln|-10 + 4| = \ln(1) - \ln(6) = - \ln(6)$$

- On décompose la fonction à intégrer en une somme de termes que l'on sait intégrer.

Division euclidienne et décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

$$I = \int_2^5 \frac{4t^3+2t^2-10t+1}{(t-1)(t+2)}dt = \int_2^5 \left(4t-2-\frac{1}{t-1}+\frac{1}{t+2}\right)dt = \left[2t^2-2t-\ln|t-1|+\ln|t+2|\right]_2^5$$

d'après l'exemple de calcul de primitive du chapitre 1.

$$I = (50-10-\ln 4+\ln 7)-(8-4-\ln 1+\ln 4) = 40-4+\ln\frac{7}{4\times 4} = 36+\ln 7-\ln 16$$

2. Intégration par parties.

Théorème : Si f est dérivable de dérivée f' continue sur [a ; b],

Si g admet une primitive G sur [a ; b], alors

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \left[f(x)G(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)dx.$$

Exemples :

- $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin(2x)dx$ On pose f(x) = x g(x) = sin(2x)

  d'où f'(x) = 1 $G(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x)$.

$$I = \left[x\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right)dx = -\frac{1}{2}\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(2x)dx$$

$$I = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}(1-0) = \frac{1}{4}.$$

- $J = \int_1^2 \ln(x)dx$ On pose f(x) = ln(x) g(x) = 1

  d'où $f'(x) = \frac{1}{x}$ G(x) = x.

$$J = \left[x\ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x}x\,dx = 2\ln(2)-0-\left[x\right]_1^2 = 2\ln(2)-1.$$

3. Changement de variables.

L'intérêt est de transformer la fonction à intégrer en une fonction dont on connaît la primitive.

Théorème :	Soit φ une bijection dérivable sur [α ; β], de dérivée φ' continue. Soient a = φ(α) et b = φ(β). Soit f une fonction continue sur [a ; b]. On a $\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{a}^{b} f(t)dt$.

Pratique du changement de variable : on pose t = φ(x) d'où dt = φ'(x) dx

intégrer en **x** entre α et β ⇔ intégrer en **t** entre a = φ(α) et b = φ(β).

Exemple : • Calcul de I = $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}dx$. La fonction φ(x) = $\sqrt{x}$ est bijective sur [0 ;4].

D'où le changement de variable : t = $\sqrt{x}$ dt = $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ dx dx = 2t dt.

I = $\int_0^2 \frac{2t}{t(t^2+1)}dt = 2\int_0^2 \frac{1}{(t^2+1)}dt = 2\left[\arctan t\right]_0^2$ = 2 arctan(2).

Remarque : Pour intégrer une fraction rationnelle en sin x, cos x, tan x, la méthode générale est le changement de variable t = tan $\frac{x}{2}$. On obtient une fraction rationnelle en t à intégrer.

Si t = tan $\frac{x}{2}$ alors	cos(x) = $\frac{1-t^2}{1+t^2}$ sin(x) = $\frac{2t}{1+t^2}$ tan(x) = $\frac{2t}{1-t^2}$

Exemple : • Calcul de J = $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}dx$ La fonction φ(x) = tan $\frac{x}{2}$ est bijective sur $\left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$.

On pose t = tan $\frac{x}{2}$ dt = $\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)\frac{1}{2}dx$ dx = $\frac{2}{1+t^2}$ dt

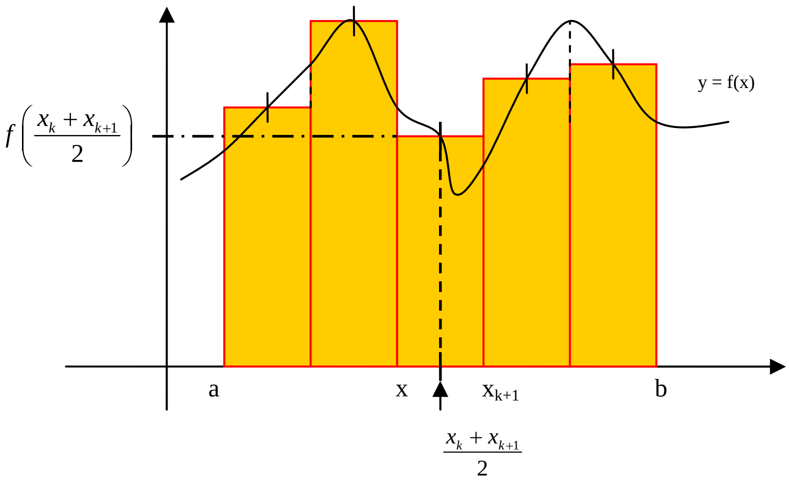
De plus $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\tan\frac{\pi}{4}$ = 1

J = $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{1}{t}dt = \left[\ln|t|\right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} = 0 - \ln\frac{1}{\sqrt{3}} = \ln\sqrt{3} = \frac{1}{2}\ln 3$

VI. Calcul approché d'intégrales

Soit $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ une subdivision de $[a ; b]$ en n intervalles de même amplitude égale à $\dfrac{b-a}{n}$

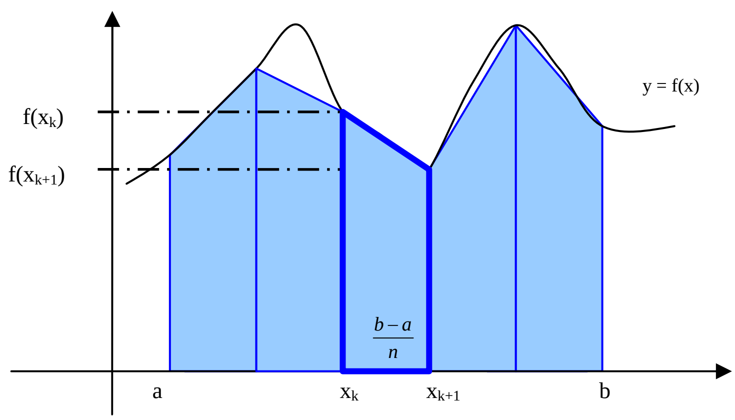
1. Méthode des rectangles :



On approche l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ par la somme des aires des rectangles.

Si n est suffisamment grand, $$\int_a^b f(t)dt \approx \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)$$

2. Méthode des trapèzes.



On approche l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ par la somme des aires des trapèzes.

Si n est suffisamment grand, $$\int_a^b f(t)dt \approx \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2}.$$