# Chapitre 2 : Intégrales généralisées.



La notion d'intégrales généralisées est une extension de la notion d'intégrale simple.

## I. Intégrale sur un intervalle de longueur infinie.

### 1. Intégrale du type $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ .

Définition : Soit f : $[a\,;+\infty[\ \to \mathbb{R}$ continue.

On dit que $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge si $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^{x} f(t)dt$ existe et est finie, et alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^{x} f(t)dt$

Sinon $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est dite divergente.

On dit aussi que f est intégrable sur $[a\,;+\infty[$ dans le premier cas, et que f n'est pas intégrable sur $[a\,;+\infty[$ dans le second cas.

Exemples : a) Convergence de $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ .

$$\int_0^{x} e^{-t}dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{x} = -e^{-x}+1 \qquad \lim_{x\to+\infty}\int_0^{x} e^{-t}dt = -0+1=1$$

Donc l'intégrale converge et $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$.

b) Convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$.

1° cas : $\alpha \neq 1$ $\quad \int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \left[ \frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_1^x = \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1}$

$$\lim_{x\to+\infty} x^{-\alpha+1} = \begin{cases} +\infty & si \ -\alpha+1>0 \qquad \alpha<1 \\ 0 & si \ -\alpha+1<0 \qquad \alpha>1 \end{cases}$$

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si $\alpha > 1$, et diverge si $\alpha < 1$.

2° cas : $\alpha = 1$ $\quad \int_1^x \frac{1}{t} dt = [\ln(t)]_1^x = \ln(x)$ $\quad$ or $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$

Donc l'intégrale diverge.

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt \ \ \textbf{converge si et seulement si} \ \ \alpha > 1}$$

**Intégrale de référence**

Interprétation graphique :

L'aire sous la courbe à droite de 1 est finie pour la courbe y = $\frac{1}{x^2}$,

infinie pour la courbe y = $\frac{1}{x}$.

## 2. Intégrale du type $\int_{-\infty}^{a} f(t)dt$.

Définition : Soit f : ]-∞ ; a[ → $\mathbb{R}$ continue.

On dit que $\int_{-\infty}^{a} f(t)dt$ converge si $\lim_{x\to-\infty} \int_x^a f(t)dt$ existe et est finie, et alors $\int_{-\infty}^{a} f(t)dt = \lim_{x\to-\infty} \int_x^a f(t)dt$

Sinon $\int_{-\infty}^{a} f(t)dt$ est dite divergente.

On dit aussi que f est intégrable sur ]-∞ ; a[ dans le premier cas, et que f n'est pas intégrable sur ]-∞ ; a[ dans le second cas.

Exemples : a) Convergence de $\int_{-\infty}^{0} e^{-t}dt$.

$$\int_{x}^{0} e^{-t}dt = \left[-e^{-t}\right]_{x}^{0} = -1+e^{-x} \qquad \lim_{x\to-\infty}\int_{x}^{0} e^{-t}dt = +\infty$$

Donc l'intégrale diverge.

b) Convergence de $\int_{-\infty}^{\pi} \sin t\, dt$.

$$\int_{x}^{\pi} \sin t\, dt = \left[-\cos t\right]_{x}^{\pi} = 1+\cos x$$ or cos n'a pas de limite en $-\infty$

Donc l'intégrale diverge.

c) Convergence de $\int_{-\infty}^{0} e^{t}dt$.

$$\int_{x}^{0} e^{t}dt = \left[-e^{t}\right]_{x}^{0} = -1+e^{x} \qquad \lim_{x\to-\infty}\int_{x}^{0} e^{t}dt = 1-0 = 1$$

Donc l'intégrale converge et $\int_{-\infty}^{0} e^{t}dt = 1$.

## 3. Intégrale du type $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$.

**Définition :** Soit f : $]-\infty\,;+\infty[ \;\to \mathbb{R}$ continue.

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ est dite convergente si $\forall c\in\mathbb{R}$ $\int_{c}^{+\infty} f(t)dt$ converge et $\int_{-\infty}^{c} f(t)dt$ converge.

On a alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{c} f(t)dt + \int_{c}^{+\infty} f(t)dt$

Sinon elle est dite divergente.

On dit aussi que f est intégrable sur $]-\infty\,;+\infty[$ dans le premier cas, et que f n'est pas intégrable sur $]-\infty\,;+\infty[$ dans le second cas.

Exemples : a) Convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t}dt$.

$\int_{0}^{+\infty} e^{-t}dt$ converge et $\int_{-\infty}^{0} e^{-t}dt$ diverge donc $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t}dt$ diverge.

b) Convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$

Soit $c \in \mathbb{R}$

$$\int_c^x \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan(t)]_c^x = \arctan(x) - \arctan(c) \qquad \lim_{x\to+\infty} \int_c^x \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} - \arctan(c)$$

$$\int_x^c \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan(t)]_x^c = \arctan(c) - \arctan(x) \qquad \lim_{x\to-\infty} \int_x^c \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(c) + \frac{\pi}{2}$$

$\int_c^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ et $\int_{-\infty}^{c} \frac{dt}{1+t^2}$ convergent, ceci pour tout réel c.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ converge et $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} - \arctan(c) + \arctan(c) + \frac{\pi}{2} = \pi$ .

## II. Intégrale sur un intervalle qui contient un point où la fonction n'est pas définie

On peut supposer que f n'est pas définie en a, quitte à utiliser la relation de Chasles.

### 1. Intégrale du type $\int_a^b f(t)dt$

**Définition** : Soit f : ]a ; b] $\rightarrow$ $\mathbb{R}$ continue, f non définie en a.

On dit que $\int_a^b f(t)dt$ converge si $\lim_{x\to a^+} \int_x^b f(t)dt$ existe et est finie, et alors $\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to a^+} \int_x^b f(t)dt$ .

Exemple : Convergence de $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ :

1° cas : $\alpha \neq 1$. $\int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_x^1 = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$ or $\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x^{\alpha-1}}$ = 0 si $\alpha - 1 < 0$ $\alpha<1$

= + $\infty$ si $\alpha - 1 > 0$ $\alpha>1$.

2° cas : $\alpha = 1$. $\int_x^1 \frac{dt}{t} = [\ln|t|]_x^1 = -\ln|x|$ or $\lim_{x\to0^+} \ln|x| = -\infty$

**Donc $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.** **Intégrale de référence**

### 2. Intégrale du type $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ avec f non définie en a

**Définition :** Soit f : ]a ; +∞[ $\to \mathbb{R}$ continue.

$\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est dite convergente si $\forall c \in \mathbb{R}$ $\int_c^{+\infty} f(t)dt$ converge et $\int_a^{c} f(t)dt$ converge.

On a alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt = \int_a^{c} f(t)dt + \int_c^{+\infty} f(t)dt$

Sinon elle est dite divergente.

Exemple : $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ diverge quel que soit α.

## III. Critères de convergence.

### 1. Cas où f est positive

**Proposition :** $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge $\Leftrightarrow$ $x \to \int_a^{x} f(t)dt$ est majorée indépendamment de x.

Justification : Cette fonction est croissante, majorée, donc elle tend vers sa borne supérieure.

**Théorème de comparaison :**

- Soient f et g positives et continues sur [a ; +∞[.

Si $\forall t \geq a$ $0 \leq f(t) \leq g(t)$

Alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge $\Rightarrow$ $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ diverge

$\int_a^{+\infty} g(t)dt$ converge $\Rightarrow$ $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge et $0 \leq \int_a^{+\infty} f(t)dt \leq \int_a^{+\infty} g(t)dt$

- Soient f et g positives et continues sur ]a ; b].

Si $\forall t \in ]a ; b]$ $0 \leq f(t) \leq g(t)$

Alors $\int_a^{b} f(t)dt$ diverge $\Rightarrow$ $\int_a^{b} g(t)dt$ diverge

$\int_a^{b} g(t)dt$ converge $\Rightarrow$ $\int_a^{b} f(t)dt$ converge et $0 \leq \int_a^{b} f(t)dt \leq \int_a^{b} g(t)dt$

Règle des équivalents :

Si f et g sont continues, positives et $f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x)$ (resp quand x $\to$ a),

alors les intégrales $\int_c^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_c^{+\infty} g(t)dt$ (resp $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ ) sont de même nature.

**Etude de la convergence d'une intégrale généralisée en utilisant un équivalent :**

1. Etude de la continuité de la fonction f à intégrer $\to$ On identifie le problème.
2. On montre que f est positive
3. Recherche d'un équivalent de f au voisinage du « point problème »
4. On utilise la règle des équivalents :
   - Soit on utilise des intégrales de référence
   - Soit on calcule l'intégrale de l'équivalent

Exemples : a) $\int_2^{+\infty} \frac{7x+1}{x^4+7x^3}dx$ or $\frac{7x+1}{x^4+7x^3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{7x}{x^4}$ et $\int_2^{+\infty} \frac{7}{x^3}dx$ converge (3>1).

Donc $\int_2^{+\infty} \frac{7x+1}{x^4+7x^3}dx$ converge.

b) $\int_1^5 \frac{1}{\ln x}dx$ or $\frac{1}{\ln x} \underset{1}{\sim} \frac{1}{x-1}$

et $\int_y^5 \frac{1}{x-1}dx = [\ln|x-1|]_y^5 = \ln(4) - \ln|y-1|$ $\lim_{y \to 1} \int_y^5 \frac{1}{x-1}dx = +\infty$ Donc $\int_1^5 \frac{1}{\ln x}dx$ diverge.

## 2. Cas où f est de signe quelconque.

On se ramène au cas précédent en considérant | f |.

<u>Proposition</u> : Si $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ converge alors $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge.

Si $\int_a^{b} |f(x)|\,dx$ converge alors $\int_a^{b} f(x)dx$ converge. L'intégrale est alors dite absolument convergente.

<u>Exemples</u> :

a) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}dx$ or $x \to \frac{\sin x}{x^2}$ est continue sur [1 ; +∞[

$\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ converge. Donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}dx$ est ACV

d'après le théorème de comparaison.

b) $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^2}dx$ or $x \to \frac{\sin x}{x^2}$ est continue et positive sur ]0 ; π]

$\sin x \underset{0}{\sim} x$ $\frac{\sin x}{x^2} \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$ et $\int_0^{\pi} \frac{1}{x}dx$ diverge Donc $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^2}dx$ diverge

Conclusion : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}dx$ diverge.

<u>Notation abusive</u> : Dans le cas où l'intégrale est convergente, on peut écrire :

$$\int_c^{+\infty} f(t)dt = \left[F(t)\right]_c^{+\infty} = \lim_{t\to+\infty} F(t) - F(c)$$