Chapitre 3 : Les séries.

I. Définitions ;

1. Définition d'une série :

Etant donnée une suite numérique (u_n), on construit une nouvelle suite (S_n) en posant $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

ex : $S_0 = u_0$ $S_1 = u_0 + u_1$ $S_2 = u_0 + u_1 + u_2$ ….

Remarques : 1) La donnée de la suite (S_n) permet de reconstruire la suite (u_n) :

En effet $u_n = S_n - S_{n-1}$ *si* $n \neq 0$ *et* $u_0 = S_0$.

2) Si (u_n) n'est définie qu'à partir du rang p, alors on pose $S_n = \sum_{k=p}^{n} u_k$ pour $n \geq p$.

Définitions : 1) Pour tout entier n, S_n s'appelle la somme partielle d'ordre n.
2) La suite (S_n) est appelée série numérique de terme général u_n et est notée $\sum_{n\geq 0} u_n$ ou $\sum_{n\geq p} u_n$.

2. Définition de convergence et divergence :

Définition :
On dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge si la suite (S_n) converge c'est à dire si $\lim_{n\to+\infty} S_n$ existe et est finie.

$\lim_{n\to+\infty} S_n$ est alors appelée somme de la série et on la note $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$: $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$.

On dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge si la suite (S_n) diverge c'est à dire si $\lim_{n\to+\infty} S_n$ existe et est infinie
ou si $\lim_{n\to+\infty} S_n$ n'existe pas.

Notation : Etudier la nature d'une série consiste à étudier si elle converge ou diverge.

Exemples : Nature des séries suivantes :

a) $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$.

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ $\lim_{n\to+\infty} S_n = 1$ donc $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge .

b) $\sum_{n\geq 0}(-1)^n$

$S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^n$ $S_n = 1$ si n est pair,

$S_n = 0$ si n est impair.

Donc (S_n) n'a pas de limite. $\sum_{n\geq 0}(-1)^n$ diverge.

c) $\sum_{n\geq 1} n$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ $\sum_{n\geq 1} n$ diverge.

Bilan des notations concernant la série $\sum_{n\geq p} u_n$ (u_n défini pour $n \geq p$).

u_n est le terme général de la série.

$S_n = \sum_{k=p}^{n} u_k$ est la somme partielle d'ordre n.

Si la série converge, $\sum_{k=p}^{+\infty} u_k$ est la somme de la série et $\sum_{k=p}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=p}^{n} u_k$.

3. Définition de séries à termes positifs :

Une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est à termes positifs si à partir d'un certain rang son terme général u_n est positif.

c'est à dire si $\exists p \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq p$ $u_n \geq 0$.

Exemple : $u_n = 4n^2 - 9$ $u_0 = -9$ $u_1 = -5$ $u_2 = 7$ $u_3 = 25$ … $\forall n\geq 2$ $u_n \geq 0$.

II. Séries de référence :

1. Séries géométriques.

Définition : Une série géométrique est une série de terme général une suite géométrique : $u_n = u_0.q^n$ ou $u_n = u_1.q^n$.

Etudions la nature de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ où $u_n = u_0.q^n$ u_0, q étant des réels.

1° cas : q = 1.

$\forall n$ $u_n = u_0$ $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)u_0$ $\lim_{n\to+\infty} S_n = \pm\infty$ selon le signe de u_0.

Donc Σu_n diverge.

2° cas : $q \neq 1$. alors $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Si $|q| < 1$ alors $q^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ d'où $\lim_{n\to+\infty} S_n = u_0 \frac{1}{1-q}$.

Donc $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge et sa somme vaut $\frac{u_0}{1-q}$.

Si $|q| > 1$ si $q > 1$ $q^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ d'où $\lim_{n\to+\infty} S_n = \pm\infty$.

Si $q < -1$ q^{n+1} n'a pas de limite donc $\lim_{n\to+\infty} S_n$ n'existe pas.

Donc $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.

Si $|q| = 1$ $q = -1$ si n est pair $S_n = u_0$

si n est impair $S_n = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} S_n$ n'existe pas.

Donc $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.

Théorème : Si $u_0 \neq 0$ la série géométrique $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge si et seulement si $|q| < 1$

et si la série converge, sa somme est $\sum_{n=0}^{+\infty} u_0 q^n = \frac{u_0}{1-q}$ ou $\sum_{n=1}^{+\infty} u_1 q^n = \frac{u_1}{1-q}$.

Exemples :

a) $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ $u_0 = 1$ $q = \frac{1}{2}$ donc la série converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

b) $\sum_{n\geq 0} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ $u_0 = 1$ $q = -\frac{1}{2}$ donc la série converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$.

c) $\sum_{n\geq 0} 2^n$ $u_0 = 1$ $q = 2$ donc la série diverge.

2. Séries de Riemann.

Définition : Une série de Riemann est une série dont le terme général u_n est de la forme $\frac{1}{n^\alpha}$ $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$: $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$.

Théorème : La série de terme général $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ diverge si $0 < \alpha \leq 1$,

converge si $\alpha > 1$.

Exemples : $\Sigma \frac{1}{n^2}$ converge $\Sigma \frac{1}{n+1}$ diverge.

Remarque : $\Sigma \frac{1}{n+1}$ est appelée série harmonique.

III. Propriétés.

1. Condition nécessaire de convergence :

Théorème : Si la série de terme général u_n converge, alors son terme général u_n tend vers 0 quand $n \to +\infty$

Démonstration : $u_n = S_n - S_{n-1}$ or $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = \sum_{k=p}^{+\infty} u_k$

Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} (S_n - S_{n-1}) = 0$.

Utilisation du théorème : Il permet de montrer que Σu_n diverge :

Si le terme général d'une série ne tend pas vers 0 quand $n \to +\infty$, alors la série diverge.

Remarque importante : LA RECIPROQUE EST FAUSSE :

$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ n'implique pas que $\sum_{n\geq p} u_n$ converge.

Contre exemple : La série harmonique : $\sum \frac{1}{n+1}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ et la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1}$ diverge (Riemann avec $\alpha = 1$)

2. Propriétés : opérations et séries :

	Σu_n converge et Σv_n converge	Σu_n converge et Σv_n diverge	Σu_n diverge et Σv_n diverge
$\Sigma(u_n + v_n)$	$\Sigma(u_n + v_n)$converge, et $\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n+v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$	$\Sigma(u_n + v_n)$ diverge	on ne peut rien conclure pour $\Sigma(u_n + v_n)$.
$\Sigma(\lambda u_n)$ $(\lambda \in \mathbb{R}^*)$	$\Sigma(\lambda u_n)$ converge, et $\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.		$\Sigma(\lambda u_n)$ diverge

Exemples : a) Soit $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$ $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2^n}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

$\sum_{n\geq 0}\frac{1}{3^n}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$ Donc $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right) = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$.

b) Soit $\sum_{n\geq 0}(2^{-n} + 2^n)$

$\sum_{n\geq 0} 2^{-n}$ converge et $\sum_{n\geq 0} 2^n$ diverge Donc $\sum_{n\geq 0}(2^{-n} + 2^n)$ diverge.

3. Propriétés des séries à termes positifs :

P1 : La suite des sommes partielles (S_n) est croissante à partir d'un certain rang.

Démonstration : $S_{n+1} - S_n = u_n$ or à partir d'un certain rang p $u_n \geq 0$
Donc $\forall n \geq p$ $S_{n+1} - S_n \geq 0$ (S_n) est croissante à partir du rang p.

P2 : Si la suite des sommes partielles (S_n) est majorée alors la série converge.

Démonstration : (S_n) est croissante et majorée, donc (S_n) converge.

P3 : Si la série Σu_n diverge, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$

Démonstration : (S_n) est croissante et non majorée, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$.

P4 : Comparaison de séries :

Si à partir d'un certain rang p $u_n \leq v_n$ alors si $\sum\limits_{n \geq 0} v_n$ converge alors $\sum\limits_{n \geq 0} u_n$ converge,

si $\sum\limits_{n \geq 0} u_n$ diverge alors $\sum\limits_{n \geq 0} v_n$ diverge.

Démonstration : $\sum\limits_{k=p}^{n} u_k \leq \sum\limits_{k=p}^{n} v_k$

Σv_n converge $\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$ existe $\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ existe $\Rightarrow \Sigma u_n$ converge

Σu_n diverge $\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} v_k = +\infty \Rightarrow \Sigma v_n$ diverge

IV. Critères de convergence pour les séries à termes positifs.

1. En utilisant un équivalent du terme général :

Théorème 1 : Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors $\sum\limits_{n \geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n \geq 0} v_n$ sont de même nature.

Démonstration : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$ On se place dans le cas où $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.

Il existe p tel que $\forall n \geq p$ $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{u_n}{v_n} \leq \dfrac{3}{2}$ et $v_n > 0$

$\forall n \geq p$ $\dfrac{1}{2} v_n \leq u_n \leq \dfrac{3}{2} v_n$ car $v_n > 0$ $\forall n \geq p$.

Donc	Σu_n converge	$\Rightarrow$	$\Sigma \frac{1}{2} v_n$ converge	$\Rightarrow$	Σv_n converge.
	Σu_n diverge	$\Rightarrow$	$\Sigma \frac{3}{2} v_n$ diverge	$\Rightarrow$	Σv_n diverge.
	Σv_n converge	$\Rightarrow$	$\Sigma \frac{3}{2} v_n$ converge	$\Rightarrow$	Σu_n converge.
	Σv_n diverge	$\Rightarrow$	$\Sigma \frac{1}{2} v_n$ diverge	$\Rightarrow$	Σu_n diverge.

Donc Σu_n et Σv_n sont de même nature.

Exemples :

1) $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n^2+3}$ $\qquad \frac{1}{n^2+3}\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{n^2}$ $\qquad$ Donc $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n^2+3}$ converge.

2) $\sum_{n\geq 0}\frac{n}{n^2+1}$ $\qquad \frac{n}{n^2+1}\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{n}$ $\qquad$ Donc $\sum_{n\geq 0}\frac{n}{n^2+1}$ diverge.

3) $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{3^n+1}$ on ne peut pas utiliser ce théorème car la série n'est pas à termes positifs.

2. Critère de d'Alembert :

Théorème 2 : Soit une série de terme général u_n, positif et non nul à partir d'un certain rang telle que $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ existe.

Si $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ alors la série $\sum_{n\geq 0}u_n$ converge.

Si $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ alors la série $\sum_{n\geq 0}u_n$ diverge.

Si $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ *alors on ne peut rien conclure.*

Exemples :

1) $\sum_{n\geq 0}u_n$ $\qquad u_n = \frac{\sqrt{3n}}{2^{n+1}}$. $\qquad$ Autre ex : $u_n = \frac{3n-1}{e^n}$

$\forall n > 0\ u_n > 0$ $\qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{3n+3}}{\sqrt{3n}}\frac{2^{n+1}}{2^{n+2}} = \sqrt{1+\frac{1}{n}}\frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}$ (<1).

Donc $\sum_{n\geq 0}u_n$ converge.

2) $\sum_{n\geq 0}u_n$ $\qquad u_n = \frac{1}{n}$ $\qquad$ série harmonique.

$\forall n > 0\ u_n > 0$ $\qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1.$ $\qquad$ Le critère n'est pas applicable.

Or $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n}$ diverge.

3) $\sum_{n\geq 0}u_n$ $\qquad u_n = \frac{1}{n^2}$.

$\forall n > 0\ u_n > 0$ $\qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1.$ Le critère n'est pas applicable.

Or $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n^2}$ converge.

Les exemples 2 et 3 confirment que $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ ne permet pas de conclure.

3. Critère de Cauchy :

Théorème 3 : Soit une série de terme général u_n, positif et non nul à partir d'un certain rang telle que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n}$ existe.

Si $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} < 1$ alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

Si $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} > 1$ alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.

Si $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$ alors on ne peut rien conclure.

Exemple : $\sum_{n\geq 1} u_n$ avec $u_n = \left(\frac{1}{n}\right)^n$ $u_n = e^{n\ln\left(\frac{1}{n}\right)} = e^{-n\ln(n)}$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

De plus $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $u_n > 0$.

$\sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{n}$ $\Rightarrow$ $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = 0$. Donc $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n}\right)^n$ converge.

V. Séries quelconques.

1. Convergence absolue.

Définition : On dit que la série de terme général u_n converge absolument si la série de terme général $|u_n|$ converge

Exemple : $\sum_{n\geq 0} 2^{-n}\cos(n\pi)$. $|u_n| = 2^{-n}$, donc $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ converge, donc $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge absolument.

Théorème : Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge absolument, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

2. Séries alternées.

Définition : Une série numérique est dite alternée si ses termes sont alternativement positifs et négatifs, c'est à dire si son terme général s'écrit $u_n = (-1)^n v_n$ avec (v_n) une suite positive.

Théorème : Si (v_n) tend vers 0 en décroissant, alors $\sum_{n\geq 0} (-1)^n v_n$ converge.

Exemple : $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$ série harmonique alternée.

$\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $\frac{1}{n+1} \xrightarrow[+\infty]{} 0$ Donc $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge.