

TD 1 : Intégrales.

1. Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_1^5 e^{-3x} dx$$

$$\int_1^2 \frac{1}{t^2} e^{\frac{4}{t}} dt$$

$$\int_0^1 \frac{x}{(2x^2 + 1)^2} dx$$

$$\int_0^{\pi/3} \sin^2 t dt + \int_0^{\pi} \cos^2 t dt$$

$$\int_0^{\pi/3} \sin^3 x dx \quad (\text{Ecrire } \sin^3 x = \sin x \times \sin^2 x)$$

2. a) Déterminer une primitive de $f(t) = \frac{48t^4 - 4t^3 + 12t^2 - 4t + 1}{(3t-1)(1+4t^2)}$. b) Calculer $I = \int_{1/2}^1 f(x) dx$.

3. Soient $f(t) = \frac{1}{\ln(t)}$ et $F(x) = \int_2^x f(t) dt \quad \forall x \in]1; +\infty[$.

a) Donner l'ensemble de définition de f , et justifier celui de F .

b) Calculer $F(2)$ et $F'(x)$. *En déduire une définition de F à partir de f .*

c) Déterminer le sens de variation de F . En déduire le signe de F .

d) Comparaison de $F(x)$ et de $G(x) = \int_2^x \frac{1}{t} dt$ au voisinage de $+\infty$:

- Comparer $f(t)$ et $\frac{1}{t}$. ($\forall t \in]1; +\infty[\quad \ln(t) < t$). En déduire une comparaison entre F et G .
- Calculer $G(x)$.
- Calculer la limite de $G(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
- En déduire la limite de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

4. Démontrer que : $\sqrt{2} \leq \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/4} \sqrt{3 - \cos^2 t} dt \leq \sqrt{3}$.

5. Calculer les intégrales suivantes, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\int_0^1 t e^{-t} dt$$

$$\int_1^3 t (\ln t)^2 dt$$

$$\int_0^5 x^2 e^{-4x} dx$$

6. Calculer : $\int_0^{\pi/3} x \cos(3x) dx$ $\int_1^2 \frac{x}{1+x^4} dx$ $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2+2\cos x} dx$ (changement de variable)

7. Calculer une valeur approchée de $\int_1^{13} \ln(x) dx$ en utilisant la méthode des rectangles, puis la méthode des trapèzes avec une subdivision en 4 intervalles.
Comparer les 2 valeurs approchées à la valeur de l'intégrale.