TD n°3 : Les séries.

1. Calculer les sommes des séries $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$, $\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$, $\sum_{n=0}^{+\infty}(-5n+3)$ si elles existent.

2. Soit la série de terme général $v_n = \frac{7n+3}{n(n+1)(n+3)}$ $n \geq 1$.
   a) Calculer explicitement la somme partielle d'ordre n, après avoir décomposé v_n en éléments simples.
   b) En déduire la nature de la série, et donner sa somme.

3. Soit la série $\sum_{n\geq 1}\ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$. (*Exercice supplémentaire*)
   a) Calculer explicitement la somme partielle d'ordre n.
   (Utiliser les propriétés de ln afin d'écrire le terme général comme une somme de ln)
   b) En déduire la nature de la série, et donner sa somme.

4. Etudier la nature des séries suivantes, en utilisant les critères de d'Alembert ou de Cauchy :

$$\sum_{n\geq 2}(\ln n)^{-n} \qquad \sum_{n\geq 0}\frac{n^3}{(n+1)!} \qquad \sum_{n\geq 1}\frac{(2n-1)!}{\sqrt{n+3}}$$

5. Etudier la nature des séries suivantes, en utilisant un équivalent du terme général :

$$\sum_{n\geq 1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \qquad \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)$$

6. Etudier la nature de la série de terme général $u_n = \frac{5}{\sqrt{n}(2+\sin n)}$, en majorant ou minorant u_n par le terme général d'une série convergente ou divergente.

7. Etudier la nature des séries de terme général u_n : $u_n = 5^{-n} + \frac{1}{n+1}$ $u_n = n^2\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$

8. Soit la série $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^3+7n}$.
   a) Démontrer que la série converge.
   b) Démontrer que la série converge absolument.