Chapitre 1 : Généralités sur les séries chronologiques.

I. Présentation d'une série chronologique.

1. Définition d'une série chronologique.

Définition : On appelle série chronologique ou chronique une suite (Yt) d'observations chiffrées d'un même phénomène, ordonnées dans le temps.

Notation : Une série chronologique est aussi appelée série temporelle ou chronique.

Exemples : Nombre mensuel de vente de voitures neuves en France.
Nombre annuel de naissance en France.

Remarque : Les dates d'observations sont généralement ordonnées de manière régulière dans le temps : on manipule des séries

journalières	(cours d'une action en bourse)
mensuelles	(consommation mensuelle d'électricité)
trimestrielles	(nombre trimestriel de chômeurs)
annuelles	(chiffre annuel des bénéfices des exportations).

Propriété caractéristique des séries chronologiques :

Les données de ces séries ont un ordre : l'ordre chronologique.
La donnée Y_5 est antérieure aux données Y_6 , Y_{10}…

Ce qui n'est pas le cas de toutes les séries que l'on peut étudier :
Exemple : Recensement 2002 : série des âges des français, séries des salaires des français.

2. Les 2 repérages des données dans le temps.

Les données d'une série chronologique trimestrielle, mensuelle, journalière sont

- soit repérées à l'aide d'un seul indice t qui représente le nombre de mois entre la première observation et l'observation de la donnée en question + 1, (la 1re observation étant Y_1)
- soit repérées à l'aide de deux indices i et j, où i représente l'année de l'observation, j son « mois ». Le « mois » peut être un trimestre, un mois, un jour.

On notera indifféremment la série (Yt) et ($Y_{i,j}$).

Le lien qui existe entre Yt et Yi,j :

Exemple : Soit une série trimestrielle. $Y_{4,2} = 4370$ donc $4370 = Yt$ avec $t = (4 - 1)\times 4 + 2 = 14$.
Soit une série mensuelle. $Y_{26} = 542$ donc $542 = Y_{i,j}$ or $26 = 2*12 + 2$ donc i= 3, j =2.

Si les données s'écoulent sur n années, et chaque année contient p mois alors l'observation du j^{me} mois de la i^{me} année $Y_{i,j}$ est également notée Yt avec $t = (i - 1) \times p + j$.

i prend les valeurs 1, 2, 3, … ,n.
j prend les valeurs 1, 2, 3, … ,p.
t prend les valeurs 1, 2, 3, … ,np

Remarque : p = 4 pour série trimestrielle, p = 12 pour série mensuelle.

Ces 2 modes de repérages donnent deux types de présentation des données et deux graphiques différents.

3. Les deux présentations d'une série chronologique.

Une série chronologique est présentée soit sous la forme d'un tableau à deux colonnes, contenant np lignes :

t	Yt
1	Y_1
2	Y_2
.	.
.	.
np	Y_{np}

soit sous la forme d'un tableau contenant p colonnes et n lignes : une colonne par mois et une ligne par année.

	« Mois » 1	2	…	j	…	p
« Année » 1	y_{11}	y_{12}	…	y_{1j}	…	y_{1p}
2	y_{21}	y_{22}	…	y_{2j}	…	y_{2p}
.						
i	y_{i1}	y_{i2}	…	y_{ij}	…	y_{ip}
.						
n	y_{n1}	y_{n2}	…	y_{nj}	…	y_{np}

Exemple : Considérons la série trimestrielle du chiffre d'affaires en milliers de francs des ventes d'un magasin de 1978 à 1982.

t	Yt
1	2614
2	3010
3	2765
4	4856
5	3010
6	3397
7	3168
8	5624
9	3406
…	…

tranp 1 doc p1

		Trim 1 j = 1	Trim2 j = 2	Trim 3 j = 3	Trim 4 j = 4
i = 1	1978	2614	3010	2765	4856
i = 2	1979	3010	3397	3168	5624
i = 3	1980	3406	…		
	…				

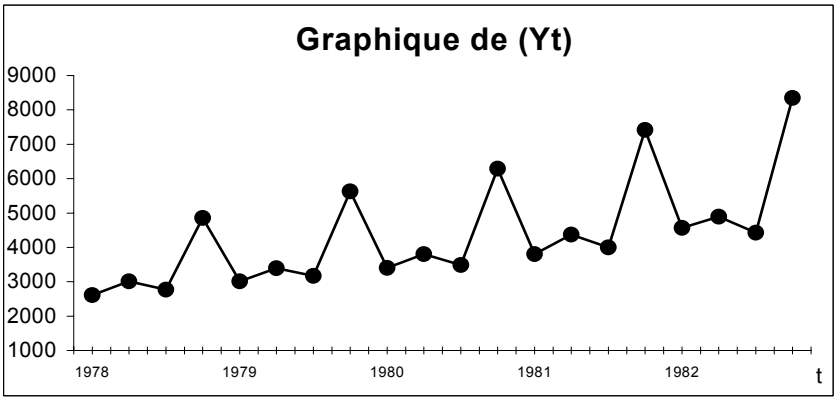
4. Graphiques d'une série chronologique.

a) Graphe de la série chronologique.

On représente les points (t ; Yt), que l'on relie par des segments de droites.

On représente l'évolution de la grandeur considérée sur l'ensemble de la période observée.

tranp 1 doc p1

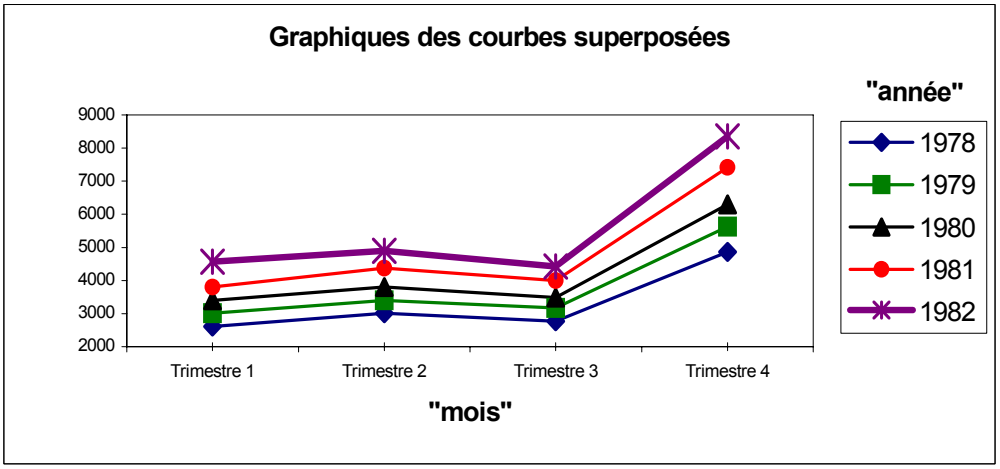


b) Graphiques des courbes superposées.

On représente les points (j ; Yi,j) que l'on relie par des segments de droites, ceci pour chacune des années i.

On représente ainsi l'évolution annuelle de la grandeur au cours des mois (pour chacune des années). On peut ainsi comparer le même mois j des différentes années, mais on ne voit pas l'évolution globale.

tranp 1 doc p1



Commentaire : On voit facilement sur ce graphique :

- que toutes les années se ressemblent,
- qu'il y a stagnation du chiffre d'affaire entre le 1er trimestre et le 3e ; puis augmentation au 4e,
- que le chiffre d'affaire augmente d'une année sur l'autre.

II. Les 3 composantes d'une série chronologique.

Le but de la décomposition d'une série chronologique est de distinguer dans l'évolution de la série, une tendance « générale », des variations saisonnières qui se répètent chaque année, et des variations accidentelles imprévisibles.
L'intérêt de ceci est d'une part de mieux comprendre, de mieux décrire l'évolution de la série, et d'autre part de prévoir son évolution (à partir de la tendance et des variations saisonnières).

tranp 2

1. La tendance : **C**t.

La tendance correspond à l'évolution à long terme de la série, l'évolution fondamentale de la série.

Exemple : augmentation du chiffre d'affaire de 1978 à 1982.

tranp 3

2. Les variations saisonnières : **S**t.

Les variations saisonnières sont des fluctuations périodiques à l'intérieur d'une année, et qui se reproduisent de façon plus ou moins permanente d'une année sur l'autre.

Exemple : quasi stagnation entre le 1° et le 3° trimestre
forte augmentation au 4° trimestre.
Cela est facilement lisible sur le graphique des courbes superposées.
Par contre la diminution entre le 4° trimestre et le 1° trimestre de l'année suivante est plus lisible sur le graphique de (Yt).

Ces variations sont dues au rythme des saisons : matières premières, congés, …

Deux principes :

- **Principe de répétition à l'identique :**
  Les variations saisonnières sont périodiques de période p (nb de mois) :
  $S_{t+p} = S_t$.

- **Principe de conservation des aires :**
  Par an, l'influence des variations saisonnières est nulle.

Cela sera traduit à l'aide de la moyenne des St. On en reparlera lorsqu'on aura défini les modèles de composition.

tranp 4

3. Les variations accidentelles ou résiduelles : εt.

Les variations accidentelles sont des fluctuations irrégulières et imprévisibles.
Elles sont supposées en général de faible amplitude.

Elles proviennent de circonstances non prévisibles : catastrophes naturelles, crise boursière, grèves …

Exemple : Les tempêtes de décembre 1999 seront à l'origine de variations accidentelles dans la série chronologique mensuelle de consommation d'électricité.

Remarque : Dans l'étude de la série chronologique du prix du bois pendant les années 1990 à 2005, elles seront à l'origine de variations qui risquent de ne pas pouvoir être considérées de faible amplitude. On sera amené par exemple à couper la série en 2 : 1990-1999 et 2000-2005.

III. Les modèles de composition de ces 3 composantes.

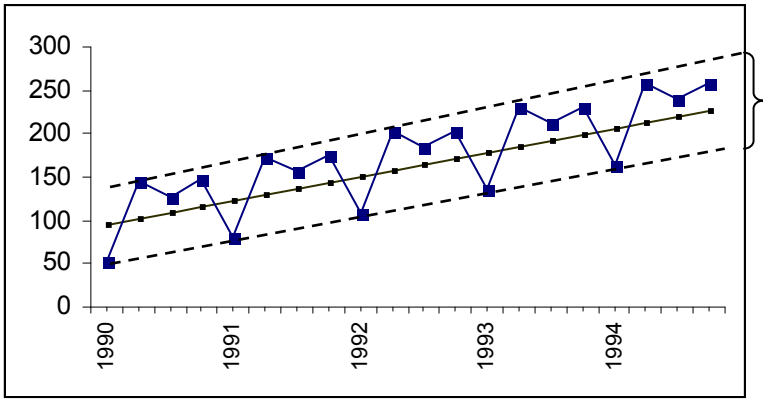
1. Le modèle additif.

Dans un modèle additif, on suppose que les 3 composantes : tendance, variations saisonnières et variations accidentelles sont indépendantes les unes des autres.

On considère que la série Yt s'écrit comme la somme de ces 3 composantes :

$$Yt = Ct + St + \varepsilon t$$

Graphiquement, l'amplitude des variations est constante autour de la tendance



même amplitude

Les 2 droites tracées sont à peu près parallèles entre elles

2. Le modèle multiplicatif.

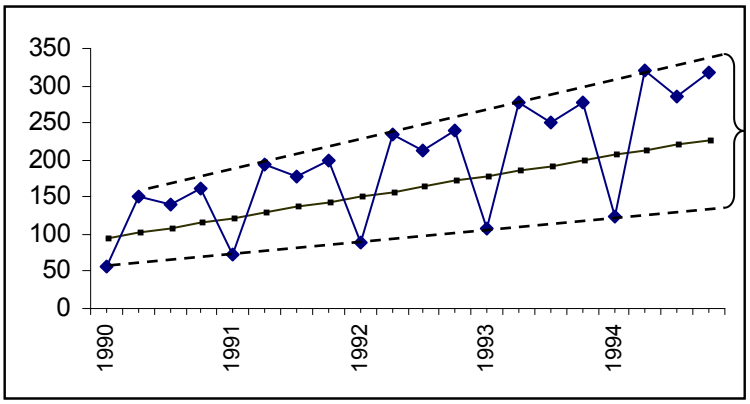
a) 1° forme de modèle multiplicatif.

On suppose que les variations saisonnières dépendent de la tendance.

Et on considère que Yt s'écrit de la manière suivante :

$$Yt = Ct \times St + \varepsilon t$$

Graphiquement, l'amplitude des variations (saisonnières) varie.



amplitude croissante (comme la tendance)

Les 2 droites tracées ne sont pas parallèles entre elles

tranp 4bis

b) 2° forme de modèle multiplicatif.

On suppose que les variations saisonnières et les variations accidentelles dépendent de la tendance.

Et on considère que Yt s'écrit de la manière suivante : $Yt = Ct \times St \times \varepsilon t$

Remarques :

- Dans le cas d'une série (Yt) à valeurs positives, ce 2e modèle multiplicatif se ramène à un modèle additif en considérant la série (ln(Yt)) : $\ln(Yt) = \ln(Ct) + \ln(St) + \ln(\varepsilon t)$.
- La seule différence entre les 2 modèles multiplicatifs est dans l'estimation des εt, qui n'a pas une grande importance.

3. Choix du modèle

Méthode de la bande : On utilise le graphe de la série et la droite passant par les minima et celle passant par les maxima.

tranp 5 doc p1

- Si ces 2 droites sont à peu près parallèles : le modèle est additif.
- Si ces 2 droites ne sont pas parallèles : le modèle est multiplicatif.

Méthode du profil : On utilise le graphique des courbes superposées

tranp 6 doc p2

- Si les différentes courbes sont à peu près parallèles : le modèle est additif.
- Sinon (les pics et les creux s'accentuent) : le modèle est multiplicatif.

Méthode du tableau de Buys et Ballot :

tranp 7 doc p2

- On calcule, pour chacune des années, la moyenne et l'écart type.
- On trace les points d'abscisse la moyenne et d'ordonnée l'écart type de la même année.
- On trace la droite des moindres carrés de ces points.

- Si l'écart type est indépendant de la moyenne : le modèle est additif.
  La pente (a) de la droite des moindres carrés est très proche de 0.
- Si l'écart type est fonction de la moyenne : le modèle est multiplicatif.
  La pente (a) de la droite des moindres carrés n'est pas nulle.

Conclusion : Pour décomposer une série chronologique on doit commencer par :

- Tracer son graphique
- Choisir un modèle de composition (additif ou multiplicatif)
- Estimer la tendance Ct
- Estimer les variations saisonnières.