

Chapitre 2 : Estimation de la tendance.

I. Ajustement :

1. Méthode de Mayer : ajustement par une droite :

On ajuste le nuage de points $(t; Y_t)$ par une droite passant par deux points calculés :

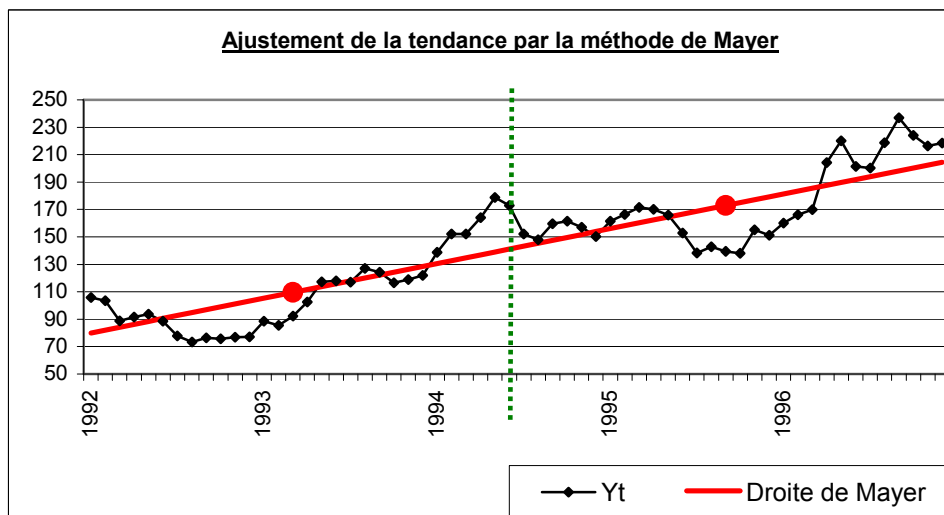
On découpe la série en 2 sous ensembles de même effectif.

Pour chacun des 2 sous ensembles, on calcule la moyenne des t et la moyenne des Y_t .

On obtient ainsi 2 points $(\bar{t}_1; \bar{Y}_1)$, $(\bar{t}_2; \bar{Y}_2)$, appelés points moyens.

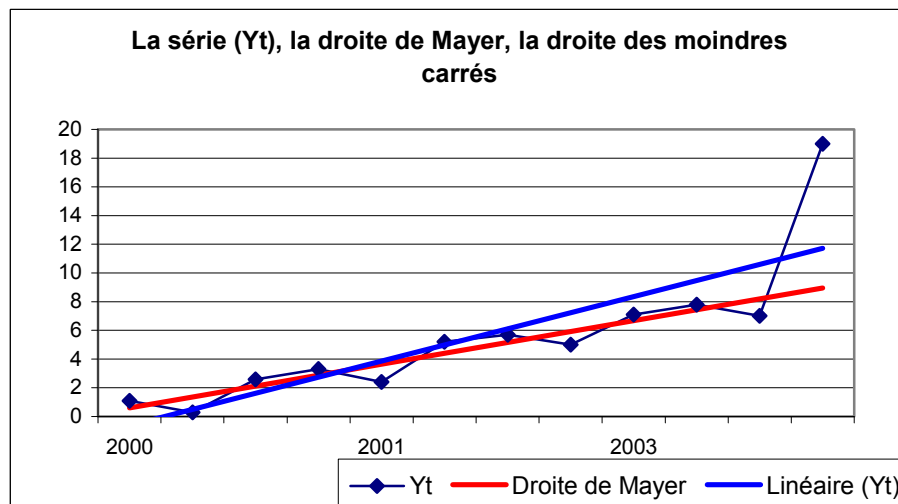
Il reste à tracer la droite passant par ces 2 points.

Document 1 :



Remarque : On peut calculer les points médians au lieu des points moyens.
Cela permet de limiter l'influence des valeurs aberrantes.

Document 2 :



2. Méthode des moindres carrés :

a) Tendance linéaire :

On utilise la méthode des moindres carrés pour ajuster la série chronologique Y_t , avec la fonction $C_t = at + b$.

On détermine la droite des moindres carrés ($y = at + b$) du nuage de points ($t ; Y_t$).

(C'est-à-dire la droite qui minimise la distance $\sum (Y_t - (at + b))^2$)

$$\text{D'où : } \quad a = \frac{\text{cov}(t, Y)}{v(t)} \quad \text{et} \quad b = \bar{Y} - a\bar{t}$$

$$\text{avec } \text{cov}(t, Y) = \frac{1}{np} \sum_{t=1}^{np} (t - \bar{t})(Y_t - \bar{Y}) = \frac{1}{np} \sum_{t=1}^{np} tY_t - \bar{t}\bar{Y} \quad \bar{Y} = \frac{1}{np} \sum_{t=1}^{np} Y_t \quad v(t) = \frac{1}{np} \sum_{t=1}^{np} (t - \bar{t})^2 = \frac{1}{np} \sum_{t=1}^{np} t^2 - \bar{t}^2 \quad \bar{t} = \frac{1}{np} \sum_{t=1}^{np} t$$

Remarque : La droite des moindres carrés ajuste au mieux au sens des moindres carrés (c'est celle qui passe le plus près de l'ensemble des points), mais elle ne modélise pas toujours bien la **tendance**, ceci est le cas pour la 2^e série possédant une valeur « aberrante ».

b) Tendance polynomiale :

On peut utiliser la méthode des moindres carrés afin d'ajuster une tendance sous la forme d'un polynôme de degré choisi.

L'observation du graphe de la série donne une idée du degré du polynôme (selon la forme de la courbe)

Il faut faire un **compromis** entre :

- obtenir des résidus qui fluctuent autour de 0 avec une amplitude la plus faible possible (cela nécessite un degré élevé)
- utiliser un polynôme de degré le plus faible possible.

On choisit le degré minimum du polynôme qui donne un ajustement correct : il y a un degré à partir duquel on ne gagne pas beaucoup en continuant à augmenter le degré.

c) Autre tendance : changement de variable :

Pour certaines autres tendances, on peut se ramener à une tendance linéaire ou polynomiale à l'aide d'un changement de variable.

- Exemples :
- Ajuster $C_t = \frac{1}{at + b}$ revient à ajuster une tendance linéaire sur la série $Z_t = \frac{1}{Y_t}$
 - Ajuster $C_t = e^{at + b}$ revient à ajuster une tendance linéaire sur la série $Z_t = \ln(Y_t)$
 - Ajuster $C_t = \ln(at^2 + bt + c)$ revient à ajuster une tendance $at^2 + bt + c$ sur la série $Z_t = \exp(Y_t)$

d) Détermination à l'aide d'Excel d'une courbe de tendance :

Excel détermine l'équation d'une courbe de tendance **en calculant la courbe des moindres carrés des points (t ; Yt)**, dans le cas de tendance :

Linéaire	($y = at + b$)
Polynomiale	($y = a_0 + a_1t + \dots + a_6 t^6$)
Logarithmique	($y = a \ln(t) + b$)
Exponentielle	($y = ce^{bt}$)
Puissance	($y = ct^b$)

*Il suffit de faire un **clik droit sur le graphique**, puis **de choisir Ajouter une courbe de tendance.***

Transparent

II. Lissage par moyennes ou médianes mobiles

1. Définition des moyennes mobiles.

Deux choses à faire :

a) Calculer des moyennes d'ordre p d'une série (Y_t), ce qui consiste à :

- considérer les p premières valeurs de la série et en calculer la moyenne,
- puis des p valeurs précédentes, on supprime la première valeur et on considère la valeur qui suit la dernière valeur considérée à l'étape précédente, et on calcule la moyenne de ces valeurs ...

on répète ceci tant que l'on a p valeurs consécutives.

Exemple : moyenne mobile d'ordre 3 : $\frac{Y_1 + Y_2 + Y_3}{3}, \frac{Y_2 + Y_3 + Y_4}{3}, \frac{Y_3 + Y_4 + Y_5}{3}, \dots$

Transparent

b) Affecter ces moyennes mobiles à une date : la date milieu de la période de p mois considérée,

ainsi $\frac{Y_{t+1} + Y_{t+2} + \dots + Y_{t+p}}{p}$ est affectée à la date $t + \frac{p+1}{2}$.

Transparent

D'où la définition suivante :

Les moyennes mobiles d'ordre p de la série (Y_t) $_{t=1,2,\dots,np}$ sont :

$$M_p \left(t + \frac{p+1}{2} \right) = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p Y_{t+k} \quad \text{où } t = 0, 1, 2, \dots, np - p.$$

Se pose le problème de la parité de p pour les dates milieu $t + \frac{p+1}{2}$:

- Si p est impair $t + \frac{p+1}{2}$ correspond à une date.

Et si $p = 2r + 1$, on peut écrire : $M_p(t) = \frac{1}{2r+1} \sum_{k=-r}^r y_{t+k}$.

- Si p est pair $t + \frac{p+1}{2}$ se trouvent entre deux dates.

C'est pourquoi, afin que les moyennes mobiles soient affectées à des dates, on effectue une moyenne mobile d'ordre 2 sur la série des moyennes mobiles d'ordre p.

Ces dernières moyennes mobiles sont appelées moyennes mobiles centrées d'ordre p, et sont notées $M_p'(t)$.

Exemples : a) **Calculs de moyennes mobiles d'ordre 3 sur une série annuelle.**

t	Y _t	Moyennes mobiles d'ordre 3 M ₃ (t)
1990	118	}
1991	113	
1992	105	
1993	105	}
1994	103	
1995	99	}
1996	98	
1997	101	}
1998	100	
1999	107	}

b) **Calculs de moyennes mobiles centrées d'ordre 4 sur une série trimestrielle.**

t	Y _t	Moyennes mobiles d'ordre 4 M ₄ (t)	Moyennes mobiles centrée d'ordre 4 M ₄ ^(c) (t)
1985	2	}	}
	0,5		
	3,5		
	1		
1986	5	}	}
	2		
	5		
	2		
1987	6,5	}	}
	4		
	7,5		
	5		
	5		

**Moyennes mobiles d'ordre 2
des moyennes mobiles d'ordre
4 M₄(t)**

Remarque : A partir d'une série contenant N valeurs, on obtient N – p + 1 ou N – p moyennes mobiles d'ordre p, selon la parité de p.

Définition des médianes mobiles :

La définition est analogue à celle des moyennes mobiles : on prend les mêmes valeurs de Y_t, et on calcule la médiane au lieu de calculer la moyenne.

2. Estimation de la tendance par les moyennes mobiles.

Si

- la **tendance** présente une **faible courbure**,
- les variations **saisonnnières** sont **périodiques** de période p et ont une **influence nulle** sur l'année,
- les variations **accidentelles** sont de **faible amplitude**,

alors la tendance à la date t peut être estimée par la moyenne mobile (centrée) d'ordre p à la date t .

$$C_t \approx M_p(t) \quad \text{ou} \quad C_t \approx M_p'(t) \quad \text{selon la parité de } p.$$

L'ordre p est la **périodicité des variations saisonnières**, d'où :

$p = 4$	si	la série est trimestrielle
$p = 12$	si	la série est mensuelle
$p = 3$ ou 5	si	la série est annuelle

Pourquoi ajuster C_t par $M_p(t)$?

- Les S_t sont supposées de période p et d'influence nulle sur une année = p mois.
 \Rightarrow Les moyennes mobiles d'ordre p $M_p(t)$ **effacent les S_t** .
- Il reste les **et** qui sont supposées de **faible amplitude**.
 \Rightarrow Les moyennes mobiles d'ordre p effectuées sur Y_t donne C_t .

III. Avantages et inconvénients des méthodes

1. Les moyennes mobiles

- Les moyennes mobiles peuvent être **influencées par des valeurs aberrantes**.

Conséquence : Au lieu de calculer les moyennes mobiles, on peut choisir **d'estimer C_t à l'aide des médianes mobiles** de même ordre. \rightarrow transparent + photocopies

- **Perte de données** : Si on dispose d'une série chronologique sur n années contenant p mois chacune (np observations), alors on ne pourra calculer une estimation de la tendance que pour $np - p + 1$ ou $np - p$ mois (selon la parité de p), soit une année de moins que la série.

\rightarrow transparent

- Malgré ces inconvénients, elles sont **une bonne estimation**.
- L'estimation par moyenne mobile donne **une meilleure estimation que par les moindres carrés**, C_t est proche des valeurs. \rightarrow transparent

Remarque : Les moyennes mobiles laissent passer la composante tendancielle sans la modifier, si la tendance est un polynôme de degré ≤ 1 , sinon elles surévaluent la tendance.

2. Les moindres carrés.

- L'estimation est moins bonne.
- **Un ajustement correct n'est pas toujours possible**. \rightarrow transparent
- L'avantage : **facilité pour prévoir** la tendance aux dates $np + 1$, $np + 2$.