(1) Rappels

Fi# 54

+ Représentation "magnitude signée"

→ 1 bit de signe

+ Complément à 2

→ prendre la représentation binaire de la magnitude

ex : 0.1875 $\quad 0.375 \quad 0.75 \quad 0.5 \quad 0 \quad 0 \quad 0$

$.375 \quad .75 \quad 1.5 \quad 1.0$

$0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0$

signe

→ 0. 0011000

Complément à 1 → 1. 1100111

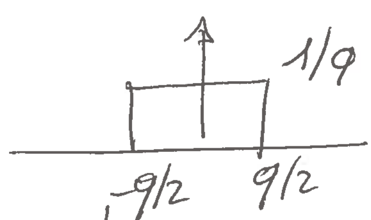
ajouter 1 → 1.1101000

Quantification d'un produit

$E\{e(n)\}=0$

quantification $\quad q = 2^{-b}$

→ modèle → arrondi



pdf.

$\sigma_e^2 = \frac{q^2}{12} = \frac{2^{-2b}}{12}$

Filt 55 note floor ceil pas ok car $E\{e(n)\} = \pm\frac{q}{2}$

$$\rightarrow \text{Pdf} = S_E(e^{j\omega}) = \sigma_e^2$$

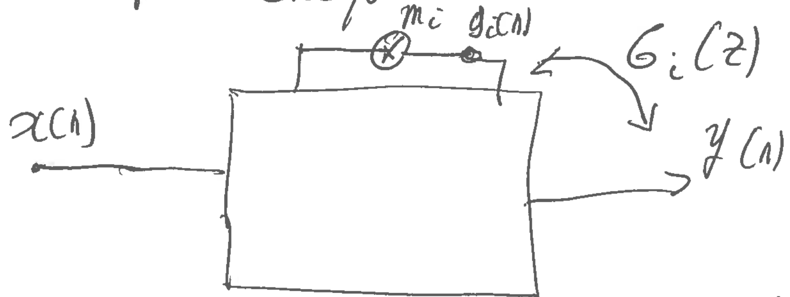
Pour les filtres on note $e_i(n)$ l'erreur de quantificatn pour chaque noeud i

et 1 $\quad e_i(n) \perp e_i(n+l) \quad l \neq 0$

2 $\quad e_i(n) \perp e_j(n) \quad i \neq j$

⇒ Principe de superposition

Pour chaque noeud



⇒ la contribution du bruit vaut

$$S_y(e^{j\omega}) = \sigma_e^2 \sum_{i=1}^{k} G_i(e^{j\omega})\, G_i(e^{-j\omega})$$

où k est le nombre de multiplieurs

⇒ Qualité

$$\text{dsp relative} = \frac{S_y(e^{j\omega})}{S_E(e^{j\omega})}\Bigg|_{dB} = 10 \log \sum_{i=1}^{k} |G_i(e^{j\omega})|^2$$

puissance relative

$$\frac{\sigma_y^2}{\sigma_e^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sum^{k} \left(G_i(z)\, G_i(z^{-1})\right)^2_{z=e^{j\omega}} d\omega$$

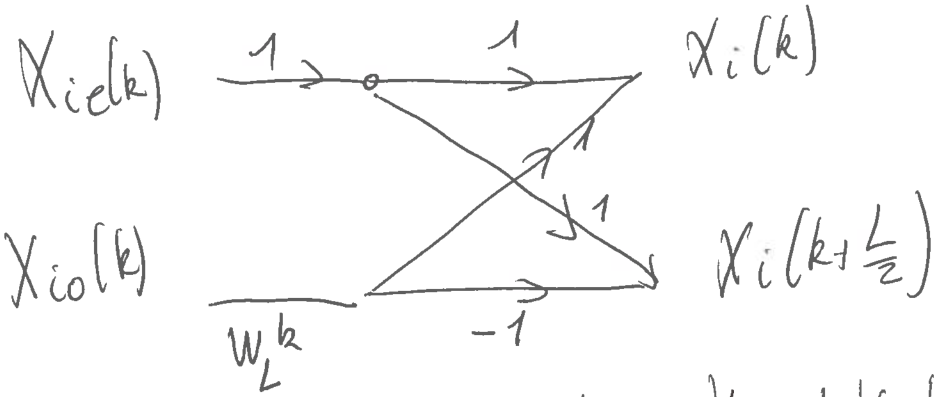
(2) $$\frac{\sigma_y^2}{\sigma_e^2} = \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |G_i(e^{j\omega})|^2 d\omega$$ Filt 56

$$= \sum_{k=1}^{K} \| G_i(e^{j\omega}) \|_2^2$$

Signal Scaling

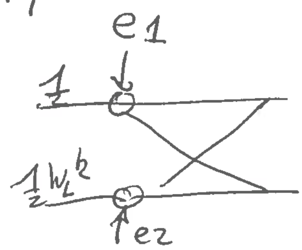
Overflow $\rightarrow$ Scaling such that
$P(\text{overflow}) \ll 1$

Exemple Radix-2 FFT



$$|X_i(k)| \leq 2 \{\max\{|X_{ie}|, |X_{io}|\}$$
$$|X_i(k+\tfrac{L}{2})| \leq 2 \max\{|X_{ie}|, |X_{io}|\}$$

$\Rightarrow$ Scaling par $\frac{1}{2}$.



Soit $\sigma_e^2 = \frac{2^{-2b}}{12}$ $\Rightarrow$ $\sigma_{e_1}^2 = 2\sigma_e^2 = \frac{2^{-2b}}{6}$
partie Imaginaire + partie Reelle.

$\sigma_{e_2}^2 = 4\sigma_e^2$
produit de 2 cpxes

Filt 57

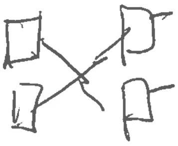
Pour la FFT globale

HYP => toutes les sources de bruit décorrélées

l étages

1^{er} étage → bruit $\times \left(\frac{1}{2}\right)^{l-1}$

k^{er} étage → $\left(\frac{1}{2}\right)^{l-k}$

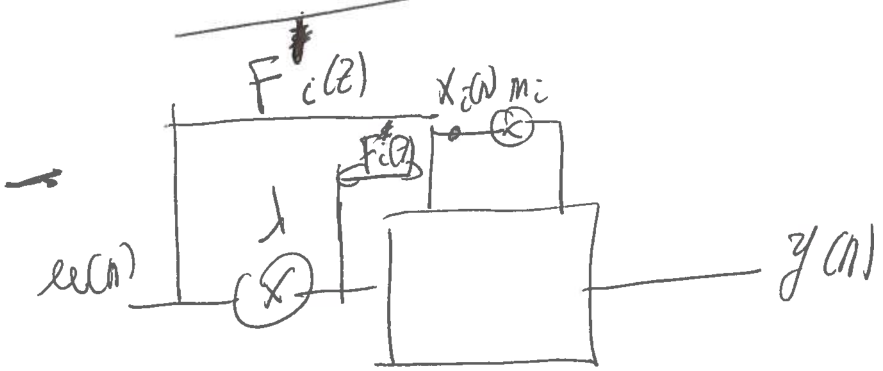


→ compter le # étages connectés à 1 sortie

$$\sigma_o^2 \overset{!}{=} 6\,\sigma_e^2\left(2 - \frac{1}{2^{l-1}}\right)$$

(3) # Scaling Analysis

(Filt 58)



$$F_i'(z) = \lambda\, F_i(z)$$

$$\Rightarrow x_i(n) = \sum f_i'(k)\, u(n-k) = \lambda \sum f_i(k)\, u(n-k)$$

Si $|u(n)| \leq u_m \quad \forall n$

$$\Rightarrow |x_i(n)| \leq u_m \sum |f_i'(k)| = u_m \lambda \sum |f_i(k)|$$

Si on veut $|x_i(n)| \leq u_m$

$$\Rightarrow \sum |f_i'(k)| \leq 1$$

$$\Rightarrow \lambda \leq \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} |f_i(k)|}$$

difficile à implémenter

Filt 59

Autre Stratégie

$$U(z) = \sum u(n) z^{-n}$$

$$X_i(z) = F_i'(z) U(z) = \lambda F_i(z) U(z)$$

$$\Rightarrow x_i(n) = \frac{\lambda}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_i(e^{j\omega}) U(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

Rappel

$$\|F(e^{j\omega})\|_p = \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(e^{j\omega})|^p d\omega \right]^{1/p}$$

$$\|F(e^{j\omega})\|_\infty = \max_\omega \{ |F(e^{j\omega})| \}$$

si $\|U(e^{j\omega})\|_\infty \leq U_m$

$$|x_i(n)| \leq \frac{U_m \lambda}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F_i(e^{j\omega})| d\omega$$

$$\leq \lambda \|F_i(e^{j\omega})\|_1 \|U(e^{j\omega})\|_\infty$$

de m̂

$$|x_i(n)| \leq \lambda \|F_i(e^{j\omega})\|_\infty \|U(e^{j\omega})\|_1$$

et également par l'inégalité de Schwartz

$$|x_i(n)| \leq \lambda \|F_i(e^{j\omega})\|_2 \|U(e^{j\omega})\|_2$$

et

$$|x_i(n)| \leq \lambda \|F_i(e^{j\omega})\|_p \|U(e^{j\omega})\|_q \quad \text{où } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Filt 60

(4) En pratique

a) $\|U(e^{j\omega})\|_\infty = U_m$

$$\Rightarrow \lambda \leq \frac{1}{\|F_i(e^{j\omega})\|_1}$$

b) signal à Energie finie

$$E = \sum u^2(n) = \|U(e^{j\omega})\|_2^2 < \infty$$

$$\Rightarrow \lambda \leq \frac{1}{\|F_i(e^{j\omega})\|_2}$$

c) signal de type sinusoïde

$\Rightarrow \|U(e^{j\omega})\|_\infty$ et $\|U(e^{j\omega})\|_2$ infinis

$$\Rightarrow \lambda \leq \frac{1}{\|F_i(e^{j\omega})\|_\infty}$$

contraignant !

d) signal aléatoire

$$\Rightarrow S_{x_i}(e^{j\omega}) = \lambda^2 F_i(e^{j\omega}) F_i(e^{-j\omega}) \; S_u(e^{j\omega})$$

$$\Rightarrow \sigma_{x_i}^2 \leq \lambda^2 \|F_i^2(e^{j\omega})\|_p \, \|S_u(e^{j\omega})\|_q \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

↳ e) $q=1$ $p=\infty$

$$\sigma_{x_i}^2 \leq \lambda_i^2 \|F_i(e^{j\omega})\|_\infty \, \sigma_u^2$$

norme 1

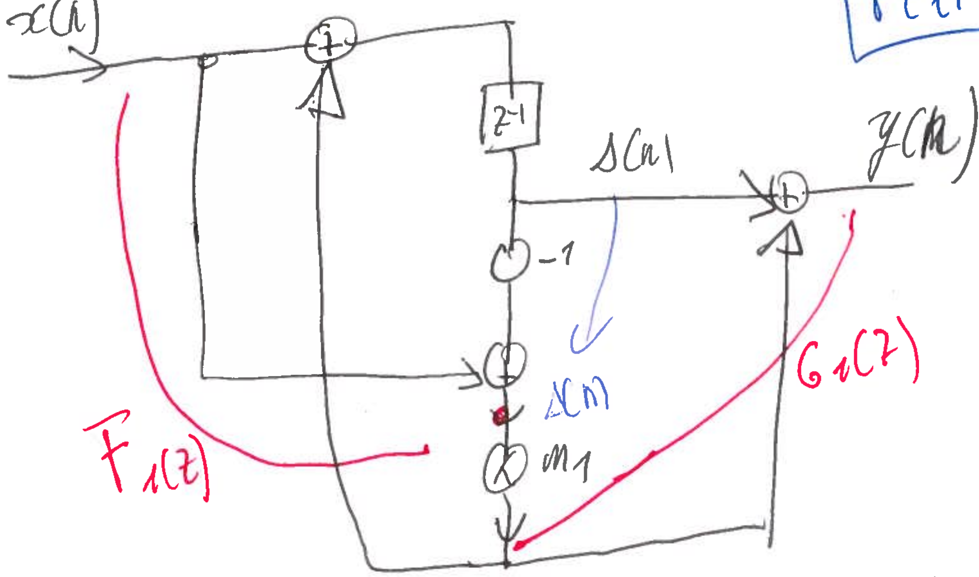
$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{\|F_i(e^{j\omega})\|_\infty}$$

norme 2

f) entrée B.B.

$$\lambda = \frac{1}{\|F_i(e^{j\omega})\|_2}$$

Exemple



→ Scaling avec norme L_2 pour implémentation point fixe

→ Variance de bruit (relative) à la sortie

$$\begin{cases} s(n+1) = x(n) + m_1 (x(n) - s(n)) \\ y(n) = s(n) + m_1 (x(n) - s(n)) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s(n+1) = -m_1 s(n) + (1+m_1) x(n) \\ y(n) = (1-m_1) s(n) + m_1 x(n) \end{cases}$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{z m_1 + 1}{z + m_1}$$

$$\|H(z)\|_2^2 = 1$$

5

Filt 62

$$x(n+1) = A\,x(n) + B\,u(n)$$
$$y(n) = C^T x(n) + D\,u(n)$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = C^T (zI - A)^{-1} B + d$$

$A = -m_1$

$B = (1+m_1)$

$c = (1-m_1)$

$d = m_1$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{z\,m_1 + 1}{z + m_1}$$

$$\Rightarrow \|H(z)\|_2^2 = 1$$

Scaling. $y'(n) = -s(n) + x(n)$

$$\Rightarrow C = -1 \qquad d = 1$$

$$\Rightarrow H(z) = -\frac{1+m_1}{z+m_1} + 1 = \frac{z-1}{z+m_1}$$

$$\Rightarrow \|F_1(z)\|_2^2 = \sum_{\text{résidus}} \left[F_1(z)\, F_1(z^{-1})\, z^{-1} \right]$$

$$= \sum_{\text{résidus}} \frac{(z-1)(\cancel{z}\,1-z)}{(z+m_1)(1+z\,m_1)\,z}$$

$$= \frac{(-m_1-1)(1-(-m_1))}{(1-m_1^2)\,(-m_1)} - \frac{1}{m_1}$$

Filt 63

$$\Rightarrow \lambda = \sqrt{\frac{1-m_1}{2}}$$

→ compenser par un gain en sortie

$$\text{de } g = \sqrt{\frac{2}{1-m_1}}$$

Puissance du bruit

$G_1(z)$:

$$s(n+1) = -m_1 s(n) + \cancel{1}\, \overset{e(n)}{x(n)}$$

$$y(n) = (1-m_1)\, s(n) + \overset{e(n)}{x(n)}$$

$$\Rightarrow G_1(z) = \frac{1-m_1}{z+m_1} + 1 = \frac{z+1}{z+m_1}$$

$$\|G_1(z)\|_2^2 = \sum_{\text{Residus}} \left[G_1(z)\, G_1(z^{-1})\, z^{-1} \right]$$

$$= \sum_{\text{Residus}} \frac{(1+z)^2}{(z+m_1)(1+zm_1)\, z}$$

$$= \frac{(1-m_1^2)}{(1-m_1^2)(-m_1)} + \frac{1}{m_1} = \frac{2}{1+m_1}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_y^2}{\sigma_e^2} = \|H(z)\|_2^2\, g^2 + \|G_1(z)\|_2^2\, g^2 + 1$$

$$= \frac{2}{1-m_1} + \frac{2}{1+m_1}\,\frac{2}{1-m_1} + 1 = \frac{-m_1^2+2m_1+7}{m_1^2-1}$$