Filtrage

TD 1
Rappels

Toutes les questions de ce TD ne seront pas résolues en séance. Vous êtes invités à essayer de les résoudre (tant que faire ce peut ...). J'essayerais de poster les solutions sur ent.unice.fr vers le 15 mars. Les exercices sont en général issus des cours "discrete-time signal processing" de Oppenheim, Schafer et Buck.

Rappels :

TABLE 3.1 SOME COMMON z-TRANSFORM PAIRS

Sequence	Transform	ROC
1. $\delta[n]$	1	All z
2. $u[n]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\| > 1$
3. $-u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\| < 1$
4. $\delta[n-m]$	z^{-m}	All z except 0 (if $m > 0$) or ∞ (if $m < 0$)
5. $a^n u[n]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| > \|a\|$
6. $-a^n u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| < \|a\|$
7. $na^n u[n]$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\| > \|a\|$
8. $-na^n u[-n-1]$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\| < \|a\|$
9. $[\cos\omega_0 n]u[n]$	$\dfrac{1-[\cos\omega_0]z^{-1}}{1-[2\cos\omega_0]z^{-1}+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
10. $[\sin\omega_0 n]u[n]$	$\dfrac{[\sin\omega_0]z^{-1}}{1-[2\cos\omega_0]z^{-1}+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
11. $[r^n\cos\omega_0 n]u[n]$	$\dfrac{1-[r\cos\omega_0]z^{-1}}{1-[2r\cos\omega_0]z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\|z\| > r$
12. $[r^n\sin\omega_0 n]u[n]$	$\dfrac{[r\sin\omega_0]z^{-1}}{1-[2r\cos\omega_0]z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\|z\| > r$
13. $\begin{cases} a^n, & 0 \le n \le N-1, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$	$\dfrac{1-a^Nz^{-N}}{1-az^{-1}}$	$\|z\| > 0$

Sequence	Transform	ROC
$x[n]$	$X(z)$	R_x
$x_1[n]$	$X_1(z)$	R_{x_1}
$x_2[n]$	$X_2(z)$	R_{x_2}
$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1(z) + bX_2(z)$	Contains $R_{x_1} \cap R_{x_2}$
$x[n - n_0]$	$z^{-n_0}X(z)$	R_x, except for the possible addition or deletion of the origin or ∞
$z_0^n x[n]$	$X(z/z_0)$	$\|z_0\| R_x$
$nx[n]$	$-z\dfrac{dX(z)}{dz}$	R_x, except for the possible addition or deletion of the origin or ∞
$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R_x
$\mathcal{R}e\{x[n]\}$	$\frac{1}{2}[X(z) + X^*(z^*)]$	Contains R_x
$\mathcal{J}m\{x[n]\}$	$\frac{1}{2j}[X(z) - X^*(z^*)]$	Contains R_x
$x^*[-n]$	$X^*(1/z^*)$	$1/R_x$
$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	Contains $R_{x_1} \cap R_{x_2}$
Initial-value theorem:		
$x[n] = 0, \quad n < 0$	$\lim_{z\to\infty} X(z) = x[0]$	

1.1

Pour chacun des systèmes suivants, déterminez si le système est (1) stable (2) causal, (3) linéaire, (4) invariant dans le temps et (5) sans mémoire.

a. $T(x[n]) = g[n]x[n], x[n]$ donné
b. $T(x[n]) = \sum_{k=n_o}^{n} x[k]$
c. $T(x[n]) = \sum_{k=n-n_o}^{n+n_o} x[k]$
d. $T(x[n]) = x[n - n_o]$
e. $T(x[n]) = e^{x[n]}$

1.2

a. Trouvez la réponse en fréquence $H(e^{j\omega})$ du sytème linéaire invariant dans le temps (LTI : Linear Time Invariant) dont les entrées et sorties sont reliées par l'équation aux différences :

$$y[n] - y[n-1]/2 = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2]$$

b. Ecrivez l'équation ausx différences qui caractérise un système dont la réponse en fréquence est :

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - 0.5e^{-j\omega} + e^{-j3\omega}}{1 + 0.5e^{-j\omega} + 0.75e^{-j2\omega}}$$

1.3

Soit un système LTI de réponse en fréquence :

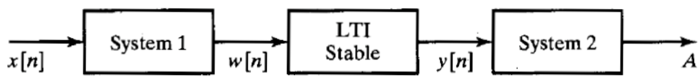
$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - e^{-j2\omega}}{1 + 0.5e^{-j4\omega}} \text{ pour } -\pi < \omega\pi$$

Déterminez la sortie $y[n]$ pour tout n si l'entrée est donnée par

$$x[n] = \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)$$

1.4

Soit le système donné dans la figure ci-dessous.

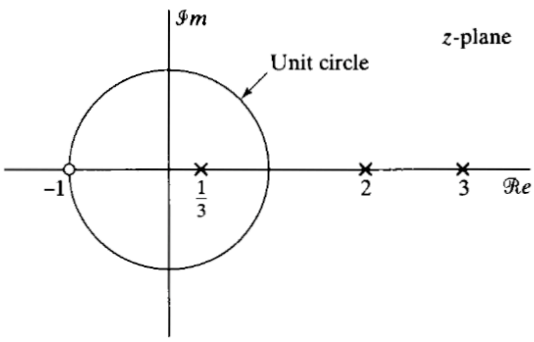


Le système 1 est un système non linéaire sans mémoire. Le système 2 calcule sa sortie comme étant $A = \sum_{n=0}^{100} y[n]$.

Considérons $x[n] = \cos(\omega n)$, avec ω un nombre réel fini. Si ω varie, alors A varie, mais A sera-t-il périodique en ω ?

1.5

Soit la transformée en z $X(z)$ dont le diagramme des poles et des zéros est donné ci-dessous :



a. Déterminez la région de convergence de $X(z)$, sachant que la transformée de Fourier existe. Dans ce cas, déterminez si la séquence $x[n]$ est unilatérale à droite, unilatérale à gauche ou bilatérale.
b. Combien de séquences bilatérales sont possibles avec ce diagramme ? (sans faire l'hypothèse que la transformée de Fourier existe)
c. Est il possible que le diagramme soit associé à une séquence qui soit stabe et causale ? Si oui, donnez la région de convergence.

1.6

Soit un système LTI causal de réponse $h[n]$ satisfaisant :

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - 0.5z^{-1})(1 + 0.25z^{-1})}$$

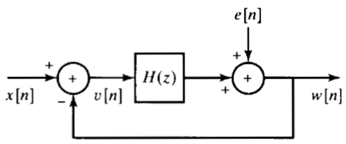
a. Quelle est la région de convergence de $H(z)$?
b. Le système est-il stable ?
c. Trouvez la $X(z)$ correspondant à l'entrée $x[n]$ qui produira la sortie

$$y[n] = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n] - \frac{4}{3}(2)^n u[-n-1]$$

d. Trouvez la réponse impulsionnelle $h[n]$ du système.
e. Déterminez l'équation aux différences du système.

1.7

Soit le système suivant :



où $H(z)$ représente le système qui est causal et invariant dans le temps.

a. En utilisant la transformée en z des signaux indiqués dans la figure, obtenez une expression de $W(z)$ sous la forme

$$W(z) = H_1(z)X(z) + H_2(z)E(z),$$

où $H_1(z)$ et $H_2(z)$ sont exprimés en fonction de $H(z)$.
b. dans le cas particulier où $H(z) = z^{-1}/(1 - z^{-1})$, déterminez $H_1(z)$ et $H_2(z)$.
c. Les systèmes $H(z)$, $H_1(z)$ et $H_2(z)$ sont-ils stables ?

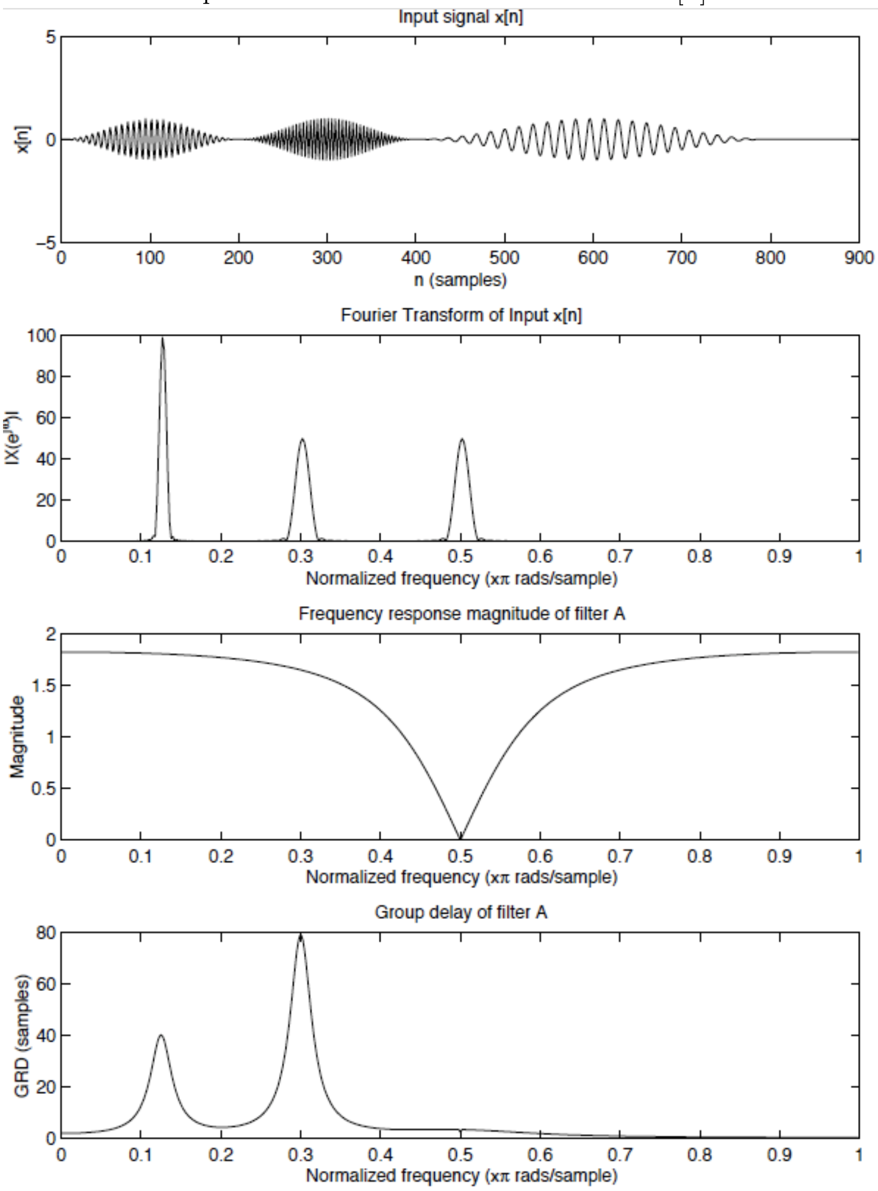
1.8

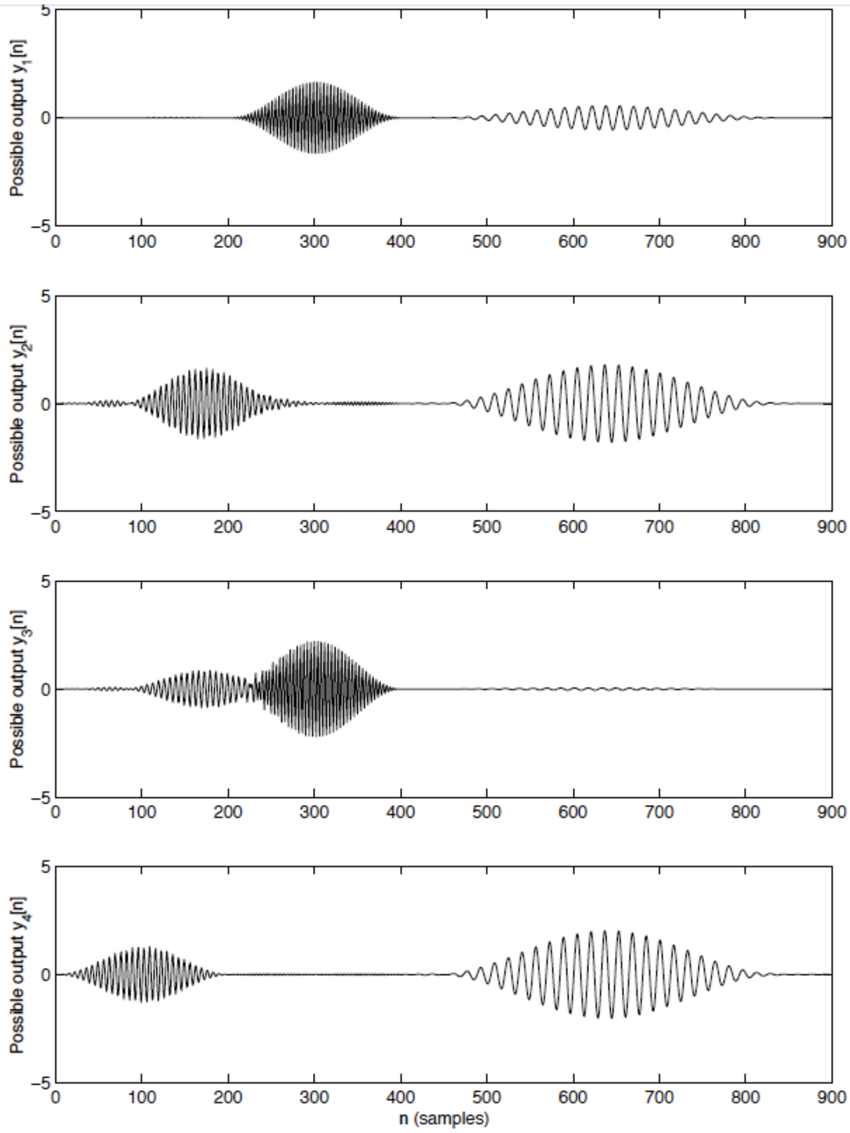
Soit un filtre A, à temps discret et invariant dans le temps, avec les entrées $x[n]$ et $y[n]$:

La réponse en fréquence et le délai de groupe sont données ci-dessous. Le signal $x[n]$ est également représenté, et est la somme de trois impulsions à bande étroite. Cette figure représente :

- x[n] ;
- $|X(e^{j\omega})|$, la magnitude de la transformée de Fourier de $x[n]$;
- La magnitude de la réponse fréquentielle du filtre A ;
- le délai de groupe du filtre A.

La deuxième figure représente 4 sorties (possibles ?) $y_i(n)$. Déterminez quel signal est une sorite possible du filtre A excité avec l'entrée $x[n]$. Justifiez !





Possible output $y_1[n]$
Possible output $y_2[n]$
Possible output $y_3[n]$
Possible output $y_4[n]$
5
0
−5
0 100 200 300 400 500 600 700 800 900
n (samples)