TD 2.1

TD 2. Délai de groupe - Echantillonnage - Filtres de base LTI

(1) Propriétés des filtres à partir de $H(z)$

Soit des filtres de réponse impulsionnelle causale $h[n]$ décrivez les caractéristiques de $H(z)$ dans le plan de z si

(1) $h[n]$ est réelle
(2) $h[n]$ est à réponse impulsionnelle finie
(3) $h[n] = h[2\alpha - n]$ 2α entier fini
(4) $h[n]$ à phase minimale
(5) $h[n]$ filtre passe-tout

(2) Soit un filtre à temps discret

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})\, e^{j\theta(\omega)}$$

- $A(\omega)$ réel et pair
- $\theta(\omega)$ continu et impair pour $-\pi < \omega < \pi$

note : - délai de groupe $\tau(\omega) = -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega}$ pour $|\omega| < \pi$
- filtre min phase $\Leftrightarrow$ stable et causal et d'inverse stable et causal.

Vrai ou faux

(1) si le filtre est causal alors $\tau(\omega) \geq 0$
(2) si $\tau(\omega) = cste$ (cste > 0) alors le filtre est un délai entier pur
(3) si min-phase et pôles et zéros réels alors $\int_0^{\pi} \tau(\omega)\, d\omega = 0$

TD 2.2

③ soit un filtre LTI stable

$$H(z) = \frac{(1-2z^{-1})(1-\frac{3}{4}z^{-1})}{z^{-1}(1-0.5z^{-1})}$$

ⓐ $H(z)$ peut être écrit sous la forme

$$H(z) = \underbrace{H_1(z)}_{\text{min-phase}} \; \underbrace{H_A(z)}_{\text{passe-tout de gain unitaire}}$$

min-phase

passe-tout de ~~norme 1~~ gain unitaire

- trouvez $H_1(z)$ et $H_A(z)$
- sont-ils uniques à une constante près?

pas faire

ⓑ
$$H(z) = \underbrace{H_2(z)}_{\text{min-phase}} \; \underbrace{H_{\cancel{A}}(z)}_{\text{FIR linéaire généralisé}}$$

min-phase

FIR linéaire généralisé

- idem

TD 2.3

(4) propriété des min-phase filters

$\rightarrow$ min - Energy delay

Soit les $h[n]$ tq $|H(e^{j\omega})|$ communs $\Rightarrow$ $E[n] = \sum_{m=0}^{n} |h[m]|^2$ maximum

$\rightarrow$ preuve?

soit $h_{min}[n] \rightleftharpoons H_{min}(z)$

on peut écrire, si z_k est un zéro de $H_{min}(z)$

$$H_{min}(z) = Q(z)(1 - z_k z^{-1}) \; , \quad |z_k| < 1$$

et $Q(z)$ est à phase minimale

Soit un autre filtre $h[n] \rightleftharpoons H(z)$

tq

+ $|H(e^{j\omega})| = |H_{min}(e^{j\omega})|$

+ $H(z)$ a un zéro en $\frac{1}{z_k^*}$ au lieu de en z_k

(a) Exprimez $H(z)$ en fonction de $Q(z)$

(b) Exprimez $h[n]$ et $h_{min}[z]$ en fonction de $q[n]$

(c) Montrez que

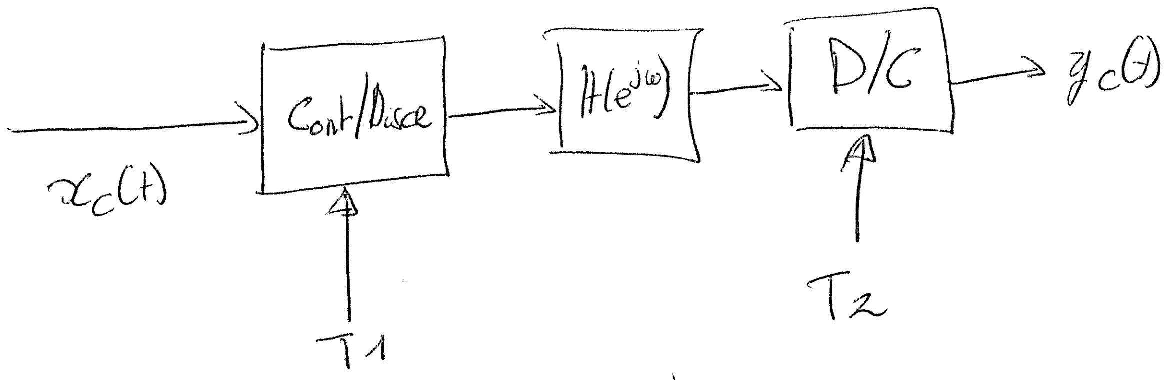
$$\mathcal{E} = \sum_{m=0}^{n} |h_{min}[m]|^2 - \sum_{m=0}^{n} |h[m]|^2 = (1 - |z_k|^2) \, |q[n]|^2$$

(d) déduisez en que

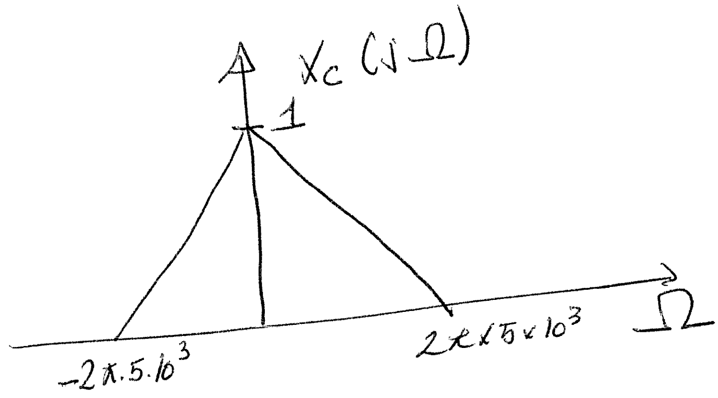
$$\sum_{m=0}^{n} |h[m]|^2 \leq \sum_{m=0}^{n} |h_{min}[m]|^2 \quad \forall n$$

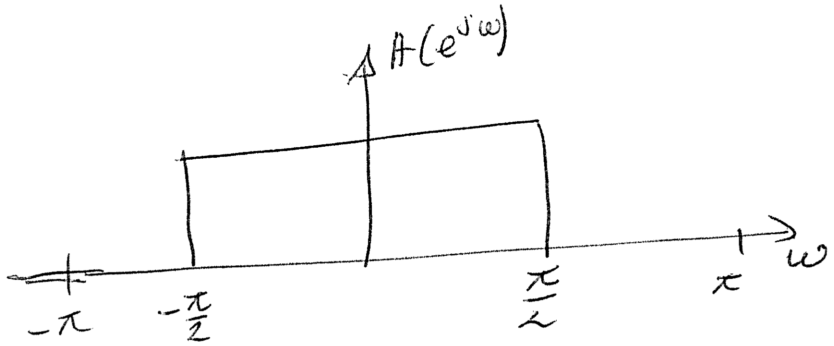
T.D.2.4

(5) soit



avec





tracez les graphes de $Y_c(j\Omega)$

pour

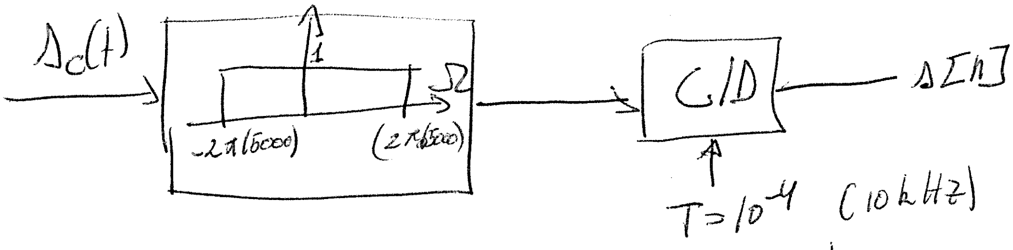
(a) $\frac{1}{T_1} = \frac{1}{T_2} = 10^4$

(b) $\frac{1}{T_1} = \frac{1}{T_2} = 2.10^4$

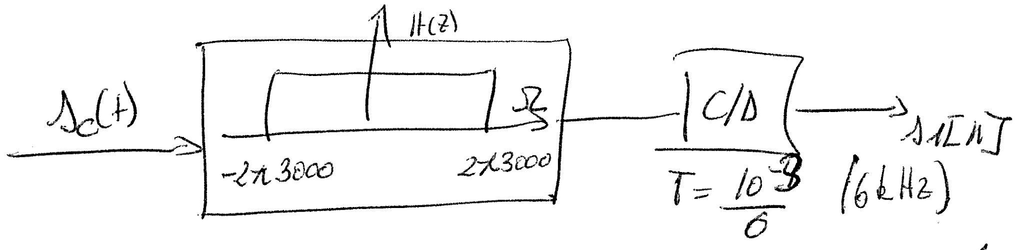
(c) $\frac{1}{T_1} = 2.10^4 \quad \frac{1}{T_2} = 10^4$

(d) $\frac{1}{T_1} = 10^4 \quad \frac{1}{T_2} = 2\,10^4$

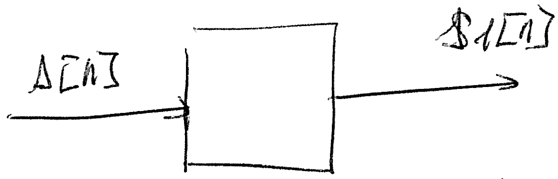
(6) Soit un signal de parole échantillonné après filtrage selon



on voudrait obtenir $s_1[n]$ équivalent à



Trouvez un filtre purement numérique



<u>note</u> le filtre peut comporter des sur échantillonneurs et/ou des sous échantillonneurs

TD 2.6

7) soit le système

$$x_c(t) \longrightarrow \boxed{C/D} \xrightarrow{x[n]=x_c(nT)} \boxed{\uparrow L} \longrightarrow \boxed{H(e^{j\omega})} \longrightarrow \boxed{\downarrow L} \longrightarrow y[n]$$

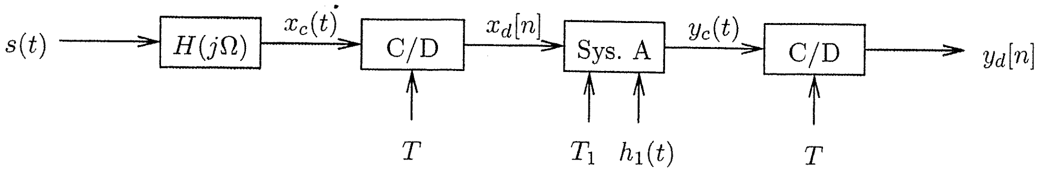
$$\uparrow T$$

avec $X_c(j\Omega) = 0 \quad |\Omega| \geq \frac{\pi}{T}$

et $H(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega} & |\omega| < \pi/L \\ 0 & \pi/L < |\omega| \leq \pi \end{cases}$

que vaut $y[n]$?

In the system shown below, the individual blocks are defined as indicated.



$H(j\Omega)$: $H(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \pi \cdot 10^{-3} \text{ rad/sec} \\ 0, & |\Omega| > \pi \cdot 10^{-3} \text{ rad/sec} \end{cases}$

First C/D: $x_d[n] = x_c(nT)$

System A: $y_c(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_d[k] h_1(t - kT_1)$

Second C/D: $y_d[n] = y_c(nT)$

(a) Specify a choice for T, T_1 and $h_1(t)$ so that $y_c(t)$ and $x_c(t)$ are guaranteed to be equal for any choice of $s(t)$.

(b) State whether your choice in (a) is unique or whether there are other choices for T, T_1 and $h_1(t)$ that will guarantee that $y_c(t)$ and $x_c(t)$ are equal. As usual, clearly show your reasoning.

(c) For this part, we are interested in what is often referred to as *consistent resampling.* Specifically, the system A constructs a continuous-time signal $y_c(t)$ from $x_d[n]$ the sequence of samples of $x_c(t)$ and is then resampled to obtain $y_d[n]$. The resampling is referred to as consistent if $y_d[n] = x_d[n]$. Determine the most general conditions you can on T, T_1 and $h_1(t)$ so that $y_d[n] = x_d[n]$.

TD 2.1_ Solutions

(1) ① Pôles / zéros : réels ou en paires complexes conjuguées

② FIR → pôles à l'origine
Région de convergence → tout le plan Z (sauf $z=0$)

③ $h[n] = h[2\alpha - n]$ 2α entier
$\Rightarrow h[n]$ FIR
⇒ pôles à l'origine
⇒ maximum 2α ~~pô~~ zéros

$$h[2\alpha - n] = z^{-2\alpha} H\left(\frac{1}{z}\right)$$

→ paires de zéros $\left(c, \frac{1}{c}\right)$

④ Min phase → pôles et zéros dans le cercle unité.

⑤ passe-tout → tout pôle est pairé avec un zéro réciproque conjugué.

(2) ① Faux → contre-exemple

$$H(e^{j\omega}) = 1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}$$

$H(z)$ causal, stable (car pôle à $z=0$)

en $\omega = 0$ $\Phi(\omega) \nearrow$ et donc $\tau(\omega) < 0$

② Faux $\tau(\omega) = cste \Rightarrow$ phase constante
et tout filtre FIR à phase nulle peut être rendu causal par délai pur et le filtre résultant aura le $\tau(\omega)$ du délai correspondant
ex. de filtre FIR à phase nulle : $z^{+1} + 2 + z^{-1}$

(3) Vrai
$$\int_0^{\pi} \tau(\omega)\,d\omega = -\theta(\omega)\Big|_{\omega=0}^{\pi} = \theta(0) - \theta(\pi)$$

si $\int_0^{\pi} \tau(\omega)\,d\omega = 0 \Rightarrow \theta(0) = \theta(\pi)$

Si min phase et poles et zeros sur l'axe réel

$\Rightarrow$ poles et zéros $\in]-1, 1[$

pour 1 pole $\quad \dfrac{1}{1-a e^{-j\omega}} \quad -1 < a < 1$

$$\angle \frac{1}{1-a e^{-j\omega}}\Big|_{\omega=0} = 0$$

et $$\angle \frac{1}{1-a e^{-j\omega}}\Big|_{\omega=\pi} = 0$$

pour 1 zéro $\quad 1 - b e^{-j\omega} \quad -1 < b < 1$

$$\angle 1 - b e^{-j\omega}\Big|_{\omega=0} = 0$$

$$\angle 1 - b e^{-j\omega}\Big|_{\omega=\pi} = 0$$

ceci est vrai pour tous les poles et zéros de ce type de filtre $\Rightarrow \int_0^{\pi} \tau(\omega)\,d\omega = 0$

note vrai $\forall$ filtre min phase à $h[n]$ réel.