Chapitre 1

Processus aléatoires discrets.

> *Cette partie du cours traite, après des rappels principalement pour fixer les notations, de matrice de corrélation et de processus autorégressifs et à moyenne mobile .*

1.1 Processus et modèles aléatoires.

1.1.1 Moyenne, autocorrélation et stationarité.

Soit un processus stochastique discret représenté par la série temporelle $X(n), X(n-1), \ldots, X(n-M)$, on définit la moyenne par :

$$\mu_X(n) = \mathrm{E}\left\{X(n)\right\} \tag{1.1}$$

où $\mathrm{E}\left\{.\right\}$ est l'opérateur espérance mathématique. De même, l'autocorrélation prend la forme :

$$r(n, n-k) = \mathrm{E}\left\{X(n)X^*(n-k)\right\}, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{1.2}$$

où l'astérisque représente la conjugaison complexe. La fonction d'autocovariance s'écrit :

$$c(n, n-k) = \mathrm{E}\left\{[X(n) - \mu_X(n)][u(n-k) - \mu_X(n-k)]^*\right\}, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{1.3}$$

Un processus est dit strictement stationnaire si tous ses moments sont indépendants du temps. Un processus est dit faiblement stationnaire, ou stationnaire au sens large, si

- $\mu_X(n) = \mu \qquad \forall n$
- $r(n, n-k) = r(k) \qquad \forall n$

On notera au passage que $r(0)$ représente la *valeur quadratique moyenne* ou *puissance* de $u(n)$, tandis que $c(0) = \sigma_X^2$ représente la *variance* .

1.1.2 La matrice de corrélation.

Définissons un *vecteur d'observation* (qui est un vecteur aléatoire !) $\mathbf{X}$(n) tel que :

$$\mathbf{X}^T(n) = [X(n), X(n-1), \ldots, X(n-M+1)] \tag{1.4}$$

On définit alors la matrice de corrélation par :

$$\mathbf{R} = \mathrm{E}\left\{\mathbf{X}(n)\mathbf{X}^H(n)\right\} \tag{1.5}$$

où $\mathbf{X}^H(n)$ représente la transposée hermitienne de $\mathbf{X}(n)$, c'est-à-dire le vecteur transposé conjugué.

En détaillant la matrice de corrélation, on obtient immédiatement :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \cdots & r(M-1) \\ r(-1) & r(0) & \cdots & r(M-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(-M+1) & r(-M+2) & \cdots & r(0) \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

1. *La matrice de corrélation d'un processus stochastique discret stationnaire est hermitienne.*

   Une matrice est dite hermitienne si elle est égale à sa transposée hermitienne, i.e.

   $$\mathbf{R} = \mathbf{R}^H \tag{1.7}$$

   Cette propriété découle directement de la définition de la matrice de corrélation. On peut d'ailleurs aisément vérifier que $r(-k) = r^*(k)$. Dans le cas d'un processus à valeurs réelles, la matrice $\mathbf{R}$ est symétrique.

2. *La matrice de corrélation d'un processus stationnaire discret est une matrice Toeplitz carrée.*

   Une matrice carrée est dite Toeplitz si tous les éléments d'une même diagonale ou sous-diagonale sont égaux. On voit directement que c'est le cas ici. D'autre part, cette propriété est directement liée à la propriété de stationnarité (au sens large) du processus. Cette propriété est importante, car elle permet dans bien des cas de simplifier les calculs algébriques.

3. *La matrice de corrélation d'un processus stationnaire discret est toujours définie non négative (et souvent définie positive).*

   Soit $\mathbf{X}$ un vecteur aléatoire complexe quelconque de dimension Mx1. Définissons $Y = \mathbf{u}^H\mathbf{X}(n)$ (et donc $y^* = \mathbf{u}^H(n)\mathbf{X}$). La puissance de Y est définie par :

   $$\begin{aligned} \mathrm{E}\left\{|Y|^2\right\} &= \mathrm{E}\left\{YY^*\right\} \\ &= \mathrm{E}\left\{\mathbf{u}^H\mathbf{X}(n)\mathbf{X}^H(n)\mathbf{u}\right\} \\ &= \mathbf{u}^H\mathrm{E}\left\{\mathbf{X}(n)\mathbf{X}^H(n)\right\}\mathbf{u} \\ &= \mathbf{u}^H\mathbf{R}\mathbf{u} \end{aligned} \tag{1.8}$$

Ce qui implique $\mathbf{u}^H\mathbf{R}\mathbf{u} \geq 0$, d'où, par définition, $\mathbf{R}$ est définie semi-positive. En fait, la matrice $\mathbf{R}$ sera singulière principalement si le processus est constitué de K sinusoïdes avec $K \leq M$.

Application 1.1 *Soit un processus constitué d'une sinusoïde complexe bruitée*

$$X(n) = \alpha \exp(j\omega n) + V(n), \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{1.9}$$

où $V(n)$ est une réalisation du bruit blanc ($\mathrm{E}\{V(n)V^*(n-k)\} = \sigma_v^2\delta_k$) à moyenne nulle. La sinusoïde et le bruit sont supposés indépendants, ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} r(k) &= \mathrm{E}\{X(n)X^*(n-k)\} \\ &= \begin{cases} |\alpha|^2 + \sigma_v^2 & k = 0 \\ |\alpha|^2 \exp(j\omega k), & k \neq 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{1.10}$$

soit

$$\mathbf{R} = |\alpha|^2 \begin{bmatrix} 1+\frac{1}{\rho} & \exp(j\omega) & \cdots & \exp(j\omega(M-1)) \\ \exp(-j\omega) & 1+\frac{1}{\rho} & \cdots & \exp(j\omega(M-2)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \exp(j\omega(-M+1)) & \exp(j\omega(-M+2)) & \cdots & 1+\frac{1}{\rho} \end{bmatrix} \tag{1.11}$$

où ρ est le *rapport signal-bruit* défini par $\rho = \frac{|\alpha|^2}{\sigma_v^2}$.

Dans le cas où ce rapport est infini (c'est-à-dire dans le cas sans bruit), $\mathbf{R}$ peut s'écrire :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-j\omega} \\ e^{-2j\omega} \\ \vdots \\ e^{-(M-1)j\omega} \end{bmatrix} \cdot \left[1 e^{j\omega} e^{2j\omega} \cdots e^{(M-1)j\omega}\right] \tag{1.12}$$

Il s'ensuit que la matrice $\mathbf{R}$ est de rang 1. Dans le cas de K sinusoïdes, nous aurons donc une matrice de rang (au plus égal) à K.

1.1.3 Les innovations.

Soit un processus stationnaire $X(n)$ de séquence d'autocorrélation $r(n)$ et de densité spectrale de puissance (dsp) $S_{xx}(f)$ définie sur $|f| \leq \frac{1}{2}$. On suppose que $S_{xx}(f)$ est réelle et continue pour tout $|f| \leq \frac{1}{2}$. On peut définir

$$S_{xx}(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} r(m) z^{-m} \tag{1.13}$$

La densité spectrale étant obtenue en évaluant $S_{xx}(z)$ sur le cercle unité. Supposons que $S_{xx}(z)$ est analytique dans une région incluant le cercle unité. On peut alors écrire la série de Laurent :

$$\log S_{xx}(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \nu(m) z^{-m} \tag{1.14}$$

ce qui, sur le cercle unité, devient :

$$\log S_{xx}(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \nu(m) e^{-j2\pi fm} \tag{1.15}$$

Les coefficients $\nu(m)$ sont donc les coefficients de Fourier de la série de Fourier représentant la fonction périodique $\log S_{xx}(f)$. Donc :

$$\nu(m) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \log S_{xx}(f) e^{-j2\pi fm} df, \qquad m = 0; \pm 1, \dots \tag{1.16}$$

$S_{xx}(f)$ étant une fonction réelle et paire, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} S_{xx}(z) &= \exp\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \nu(m) z^{-m}\right] \\ &= \sigma_v^2 H(z) H(z^{-1}) \end{aligned} \tag{1.17}$$

où $\sigma_v^2 = e^{\nu(0)}$ et

$$H(z) = \exp\left[\sum_{m=1}^{\infty} \nu(m) z^{-m}\right], \qquad |z| > r_1 \tag{1.18}$$

En évaluant $S_{xx}(z)$ sur le cercle unité, nous obtenons l'expression :

$$S_{xx}(f) = \sigma_v^2 |H(f)|^2 \tag{1.19}$$

Les coefficients $\nu(m)$ sont appelés *coefficients cepstraux* et la séquence $\nu(m)$ est appelée *cepstre* de la séquence d'autocorrélation $r(m)$.

Le filtre $H(z)$ est analytique dans la zone $|z| > r_1 < 1$. On peut donc développer $H(z)$ sous la forme causale (série de Taylor) :

$$H(z) = \sum_{m=0}^{\infty} h_n z^{-n} \tag{1.20}$$

Si on excite l'entrée de ce filtre par un bruit blanc $V(n)$ de puissance σ_v^2, la sortie sera un processus stationnaire $X(n)$ de densité spectrale de puissance $S_{xx}(f) = \sigma_v^2 |H(f)|^2 = \sigma_v^2 H(z) H(z^{-1})|_{e^{j2\pi f}}$.

De même, si $X(n)$ est un signal stationnaire ayant cette dsp, le fait de passer ce signal dans un filtre $1/H(z)$ nous fournit un bruit blanc à la sortie. On parle de *filtre blanchissant* et la sortie $V(n)$ est appelée *processus d'innovation* associé à $X(n)$

Cette représentation est appelée *représentation de Wold.*

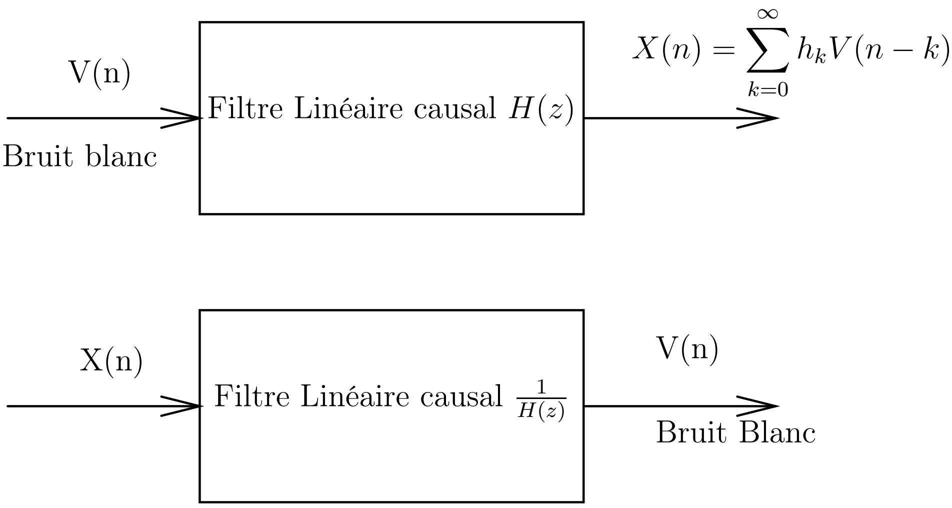

FIG. 1.1: Représentation de Wold

1.1.4 Modèles stochastiques (AR, MA, ARMA).

On restreint $S_{xx}(z)$ à être de la forme :

$$S_{xx}(z) = \sigma_v^2 \frac{B(z)B(z^{-1})}{A(z)A(z^{-1})} \qquad r_1 < |z| < r_2 \tag{1.21}$$

où $B(z)$ et $A(z)$ ont leurs racines à l'intérieur du cercle unité. On peut alors écrire :

$$H(z) = \sigma_v^2 \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{q} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{p} a_k z^{-k}} \qquad r_1 < |z| \tag{1.22}$$

De plus, par construction, $H(z)$ est causal, stable et à phase minimale. Son inverse $1/H(z)$ est également causal, stable et à phase minimale.

On peut exprimer la relation ci-dessus par l'équation aux différences suivante :

$$X(n) + \sum_{k=1}^{p} a_k X(n-k) = \sum_{k=0}^{q} b_k V(n-k) \tag{1.23}$$

Processus autorégressif (AR)

Un processus autorégressif est caractérisé par $B(z) = 1$, et donc par l'équation aux différences :

$$X(n) + \sum_{k=1}^{p} a_k X(n-k) = V(n) \tag{1.24}$$

On peut également représenter ce processus par la figure suivante.

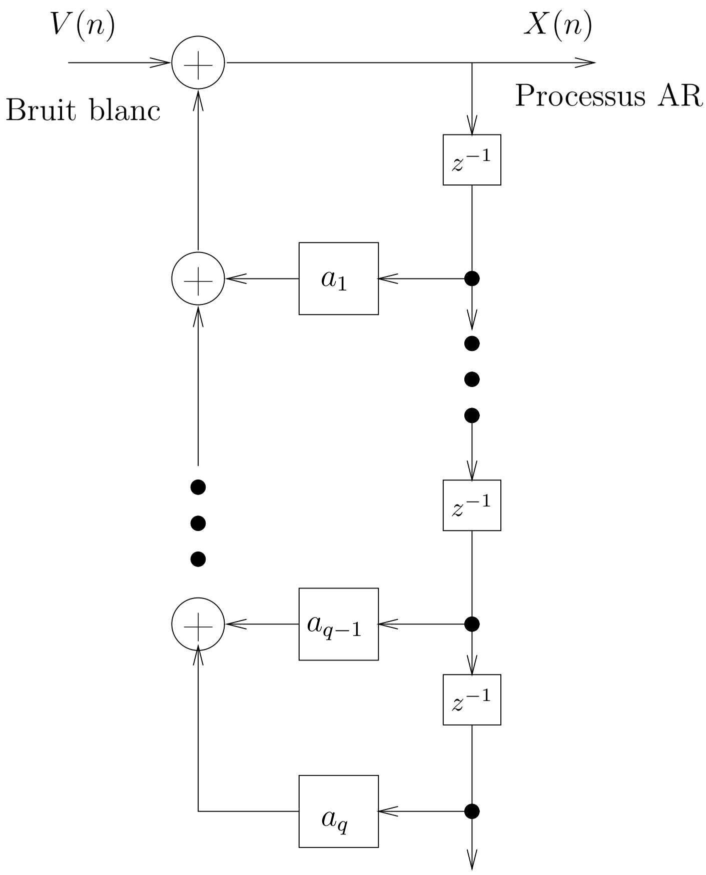

Fig. 1.2: Filtre générateur de processus AR

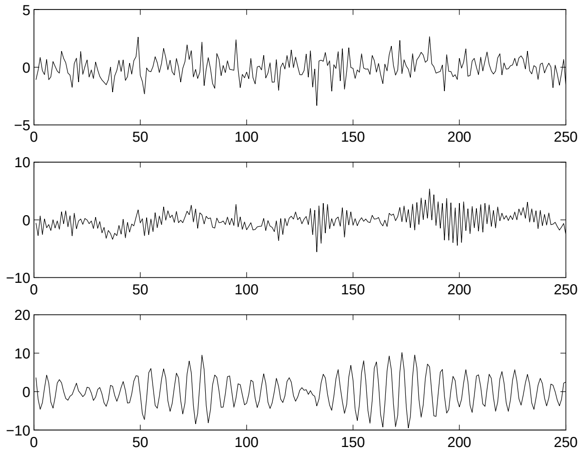

FIG. 1.3: Exemples de processus AR. Bruit blanc ; A=[1 0.1 -0.8] ; A = [1 -0.975 0.95]

Exercice 1.1 *Dans l'exemple de processus AR donnés, justifiez (par les pôles et zéros) l'allure des courbes.*

Processus à moyenne mobile (MA : Moving Average)

Un processus autorégressif est caractérisé par $A(z) = 1$, et donc par l'équation aux différences :

$$X(n) = \sum_{k=0}^{q} b_k v(n-k) \tag{1.25}$$

Processus autorégressif à moyenne mobile (ARMA)

C'est le processus général décrit ci-dessus.

1.1.5 Les équations de Yule-Walker.

La représentation de Wold nous apprend qu'il y a relation biunivoque entre la densité spectrale de puissance d'un processus stationnaire $X(n)$ et sa représentation par un bruit blanc filtré (AR, MA, ARMA). D'autre part, nous savons que la dsp est reliée de la même manière à la séquence d'autocorrélation. Cette section fera le lien entre les paramètres des filtres et la matrice d'autocorrélation.

Pour ce faire, il suffit d'écrire l'autocorrélation, en tenant compte de l'équation aux différences d'un processus ARMA :

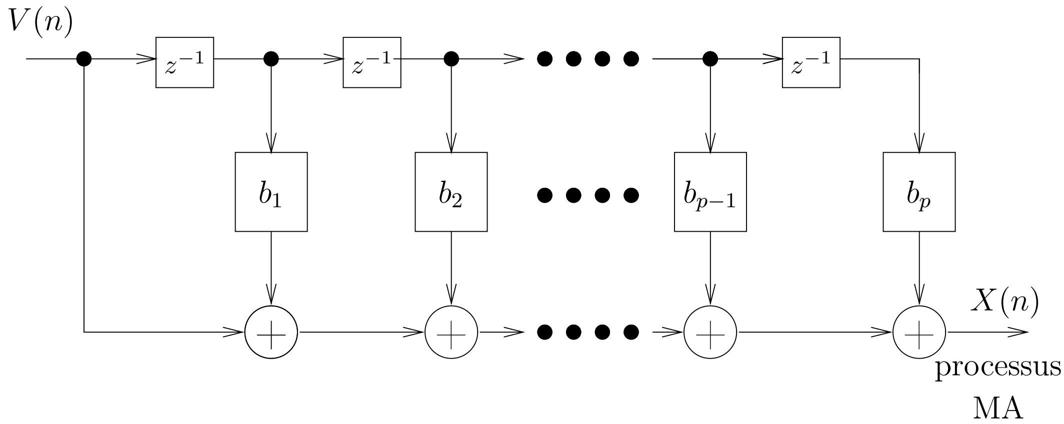

Fig. 1.4: Filtre générateur de processus MA

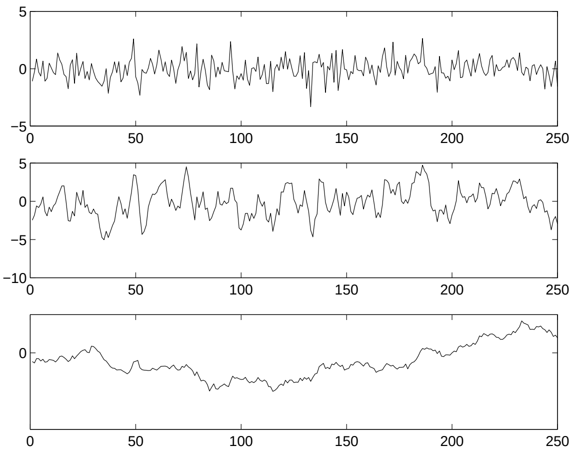

Fig. 1.5: Exemples de processus MA. Bruit blanc, B= [1 1 1 1]/4 ; B=[1 (100 éléments) 1]/100

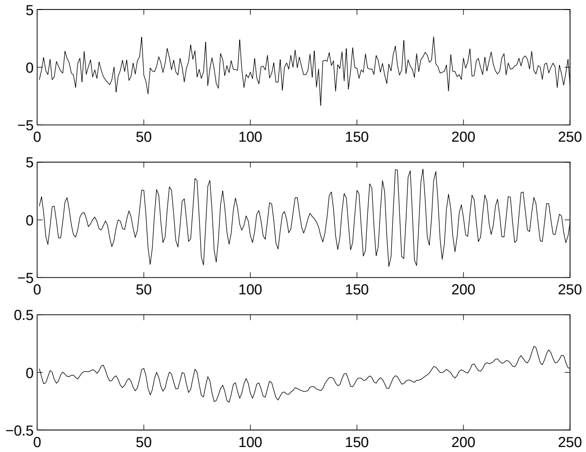

FIG. 1.6: Exemples de processus AR. Bruit blanc, A=[1 -0.975 0.95] B comme ci-dessus

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left\{X(n)X^*(n-m)\right\} = \quad & -\sum_{k=1}^{p} a_k \mathrm{E}\left\{X(n-k)X^*(n-m)\right\} \\
& + b_k \sum_{k=0}^{q} \mathrm{E}\left\{V(n-k)X^*(n-m)\right\}
\end{aligned}
\tag{1.26}
$$

Soit

$$
r_{xx}(m) = -\sum_{k=1}^{p} a_k r_{xx}(m-k) + \sum_{k=0}^{q} b_k r_{vx}(m-k) \tag{1.27}
$$

Le terme de cross-corrélation $r_{vx}(m)$ peut s'écrire en fonction du filtre $H(z)$ par (en se rappelant que $V(n)$ est blanc) :

$$
\begin{aligned}
r_{vx}(m) \quad & = \mathrm{E}\left\{X^*(n)V(n+m)\right\} \\
& = \mathrm{E}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} h_k X^*(n-k)X(n+m)\right\} \\
& = \sigma_v^2 h_{-m} \qquad m \geq 0
\end{aligned}
\tag{1.28}
$$

Les relations entre la séquence d'autocorrélation et les coefficients des filtres du processus ARMA peuvent donc s'écrire :

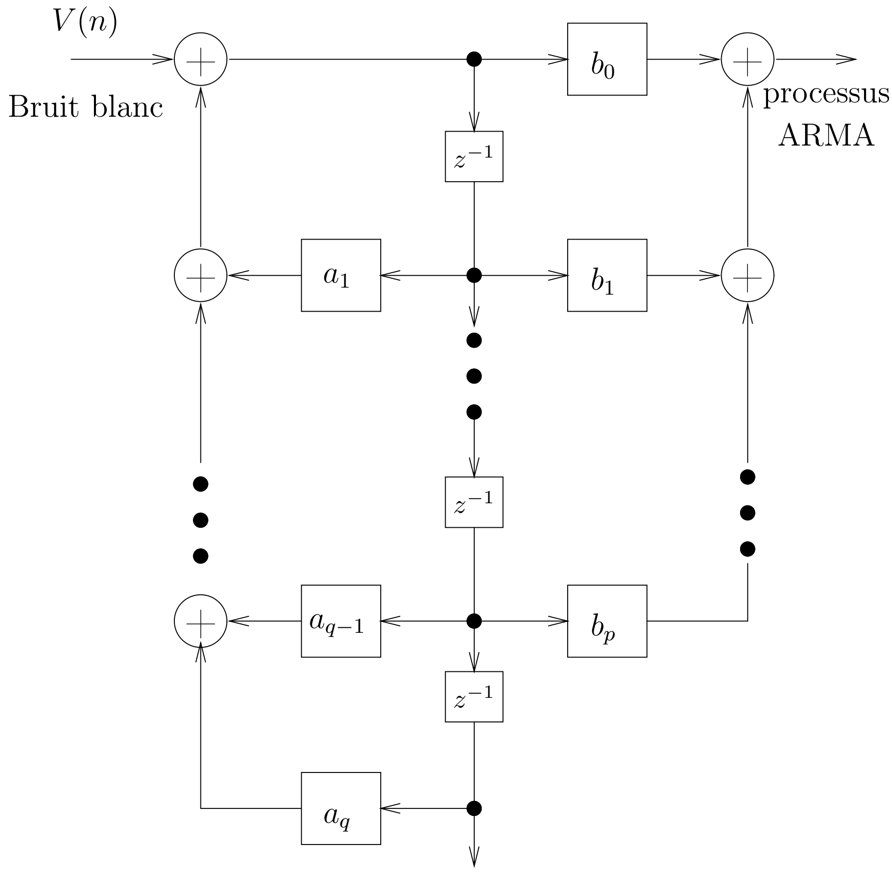

Fig. 1.7: Filtre générateur de processus ARMA

$$r_x(m) = \begin{cases} -\sum_{k=1}^{p} a_k r_{xx}(m-k), & m > q \\ -\sum_{k=1}^{p} a_k r_{xx}(m-k) + \sigma_v^2 \sum_{k=0}^{q-m} h_k b_{k+m}, & 0 \leq m \leq q \\ r_{xx}^*(-m) & m < 0 \end{cases} \tag{1.29}$$

Dans le cas d'un processus AR, ces équations se simplifient comme suit :

$$r_{xx}(m) = \begin{cases} -\sum_{k=1}^{p} a_k r_{xx}(m-k), & m > 0 \\ -\sum_{k=1}^{p} a_k r_{xx}(m-k) + \sigma_v^2, & m = 0 \\ r_{xx}^*(-m) & m < 0 \end{cases} \tag{1.30}$$

Ce sont les **équations de Yule-Walker** qui s'écrivent sous forme matricielle :

$$\boxed{\begin{bmatrix} r(0) & r^*(1) & \cdots & r^*(p) \\ r(1) & r(0) & \cdots & r^*(p-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(p) & r(p-1) & \cdots & r(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_v^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}} \tag{1.31}$$